

Министерство образования и науки Республики Калмыкия
VI республиканская олимпиада учителей математики «КУБ»
(заочный тур)

1. Доказательство:

Пусть даны длины трех сторон прямоугольного треугольника $a < b < c$, которые образуют арифметическую прогрессию с разностью $d > 0$. $a = b - d$ $c = b + d$

$$(b-d)^2 + b^2 = (b+d)^2 \quad b^2 = 4bd \quad b = 4d \quad a = 3d \quad c = 5d$$

$$a : b : c = 3 : 4 : 5 \quad (\text{чтд})$$

2. Ответ: $10\sqrt{7}$ см² и 7 см³. **Решение:** Запишем, что периметры всех граней равны:

$$AD + DB + AB = AB + AC + CB, \quad (1)$$

$$AD + DC + AC = DC + CB + DB, \quad (2)$$

$$AD + DB + AB = DB + BC + DC. \quad (3)$$

Сложив равенства (1) и (2) почленно, найдем, что $AD = BC$. Подставив вместо AD в равенство (3) BC , найдем, что $AB = DC$. Затем из (1) $AC = DB$. Отсюда легко получается, что все грани

тетраэдра равны между собой и площадь грани равна $\frac{5\sqrt{7}}{2}$, а площадь его полной поверхности

равна $10\sqrt{7}$. Так как грани треугольной пирамиды по условию являются равными равнобедренными треугольниками, то данная пирамида является равногранным тетраэдром $DABC$.

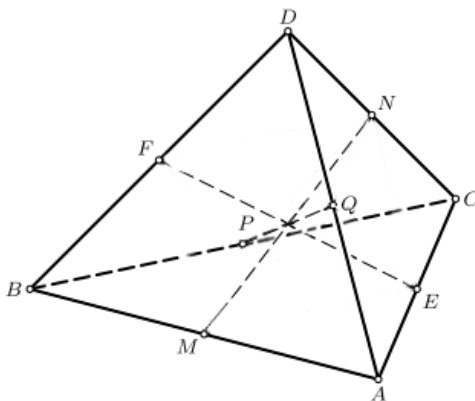
$$DA = BC = DB = AC = 4, \quad DC = AB = \sqrt{14}$$

Отрезки, каждый из которых соединяет середины противоположных (скрещивающихся) ребер тетраэдра, называются его бимедианами (средними линиями). Проведем в рассматриваемом равногранном тетраэдре бимедианы

$$\delta_1 = PQ$$

$$\delta_2 = EF$$

$$\delta_3 = MN$$



Объем равногранного тетраэдра равен трети от произведения бимедиан, то есть

$$V = \frac{1}{3} \delta_1 \delta_2 \delta_3$$

$$\delta_1^2 = PQ^2 = \frac{1}{2}(DB^2 + DC^2 - DA^2) = \frac{1}{2}(16 + 14 - 16) = 7 \Rightarrow \delta_1 = \sqrt{7}$$

$$\delta_2^2 = EF^2 = \frac{1}{2}(DC^2 + DA^2 - DB^2) = \frac{1}{2}(14 + 16 - 16) = 7 \Rightarrow \delta_2 = \sqrt{7}$$

$$\delta_3^2 = MN^2 = \frac{1}{2}(DA^2 + DB^2 - DC^2) = \frac{1}{2}(16 + 16 - 14) = 9 \Rightarrow \delta_3 = 3$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} \cdot 3 = 7$$

3. **Ответ:** например 1680, 1118.

Решение: $2018 = 2 \cdot 1009 = 2 \cdot 1009 = 2 \cdot 28^2 + 2 \cdot 15^2$

по формуле удвоения $(m+n)^2 + (m-n)^2 = 2m^2 + 2n^2$ получим

$$2018 = (28+15)^2 + (28-15)^2 = 43^2 + 13^2$$

$$2(m+n)(m-n) = 2m^2 - 2n^2$$

$$c = (m+n)^2 + (m-n)^2 \quad a = (m+n)^2 - (m-n)^2 \quad b = 2(m+n)(m-n)$$

Если $c=2018$, тогда $b=2 \cdot 43 \cdot 13=1118$ и $a=43^2-13^2=1680$

4. **Ответ: цифра 8.** Однозначных чисел ровно 9, двузначных $99 - 9 = 90$, трёхзначных $999 - 99 - 9 = 900$, четырёхзначных 9000 и т.д. Однозначные числа займут в выписанном ряду первые 9 мест, двузначные $90 \cdot 2 = 180$ мест, трёхзначные $900 \cdot 3 = 2700$ мест, четырёхзначные $9000 \cdot 4 = 36\,000$ мест, пятизначные $90000 \cdot 5 = 450\,000$ мест. Поэтому интересующая нас цифра принадлежит пятизначному числу. Цифры, принадлежащие не более чем четырёхзначным числам, имеют номера от 1 до $9 + 180 + 2700 + 36\,000 = 38\,889$. Разность $160818 - 38\,889 = 121929$ нужно разделить на 5 с остатком: $121929 = 5 \cdot 24385 + 4$. Интересующая нас цифра принадлежит 24386-му пятизначному числу, т.е. числу 34385 (первое пятизначное число — это число 10 000). В этом числе интересующая нас цифра стоит на 4-м месте.

5. **Доказательство:**

Вычтем из левой части уравнения его правую часть и вынесем общий множитель за скобки

$$0 = \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+\sqrt{ab}} + \frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+\sqrt{ab}} = \frac{1}{1+\sqrt{ab}} \left(\frac{\sqrt{ab}-a}{1+a} - \frac{\sqrt{ab}-b}{1+b} \right) =$$

$$\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{1+\sqrt{ab}} \left(\frac{\sqrt{a}}{1+a} - \frac{\sqrt{b}}{1+b} \right).$$

$$0 = \frac{\sqrt{a}}{1+a} - \frac{\sqrt{b}}{1+b} = \frac{\sqrt{a}+b}{(1+a)(1+b)} \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}-a\sqrt{b}}{(1+a)(1+b)} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(1-\sqrt{ab})}{(1+a)(1+b)}.$$

Так как числа a и b различные, то $\sqrt{a}-\sqrt{b} \neq 0$.

В итоге получим, что $1-\sqrt{ab} = 0$, $ab = 1$. (чтд)

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений..
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.