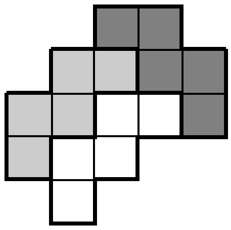
Третий этап IX республиканской олимпиады школьников по технологии УДЕ академика РАО П.М.Эрдниева в 2016-2017 у.г.

Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 4 класс.

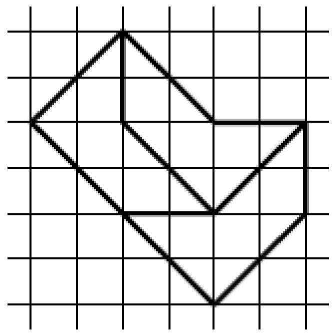
1. **Ответ:** Например, $2 \times 2 - 2 : 2 = 5 - 5 : 5 - 5 : 5$ или $22 : 22 = 55 : 5 - 5 - 5$.
   Или так $2 : 2 + 2 + 2 = 5 + 5 - 5 + 5 - 5$.
2. **Ответ: 10000 рублей.** 100%+20%=120%, 120%-24%=96%, 9600 это 96%. До уменьшения на 20% цена была 12000. До повышения на 20% телевизор стоил 10000 рублей. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3. **Ответ:** 50 рублей. Три ватрушки стоят 9 бубликов и 15 рублей. Столько же стоят 10 бубликов. Значит, один бублик стоит 15 рублей, а ватрушка – $15 \cdot 10 : 3 = 50$ рублей.
4. **Ответ: 12 гномов и 3 пони.** Всего в караване было 15 существ. Если бы все они были гномами, то у них было бы $15 \cdot 2 = 30$ ног; но на самом деле ног на 6 больше, а значит, в караване были $6 : (4 - 2) = 3$ пони и $15 - 3 = 12$ гномов.
5. **Ответ:**



Третий этап IX республиканской олимпиады школьников по технологии УДЕ академика РАО П.М.Эрдниева в 2016-2017 у.г.

Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 5 класс.

1. **Ответ:** Если цифру 2 в числе 102 передвинуть вверх, на место показателя степени, то исходное равенство примет вид $101 - 10^2 = 1$ и будет верным.
2. **Ответ:**. 90 рублей. После первого повышения цен штрюдель стал стоить $80 \cdot 1.5 = 120$ рублей; после второго повышения цен - $120 \cdot 1.5 = 180$ рублей; наконец, после двукратного снижения цены он стал стоить $180 : 2 = 90$ рублей.
   (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3. **Ответ:** 23. Раздадим три раза по две пачки, останется 3 печенья. Но те же шесть пачек печенья можно раздать иначе – три и ещё три, и тогда останется $2 \cdot 13 = 26$ печений. Значит, $26 - 3 = 23$ печенья можно поделить между туристами поровну. Поскольку число 23 простое, это возможно, только если туристов 23.
4. **Ответ:** Отвешиваем 12 кг гвоздей и откладываем их в сторону. От оставшихся 12 кг отвешиваем 6 кг и откладываем их в другую сторону. От оставшихся 6 кг отвешиваем 3 кг и соединяем их с отложенными 6 кг. Получаем искомые 9 кг гвоздей.
5. **Ответ:**



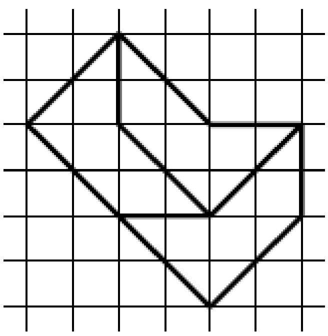
Третий этап IX республиканской олимпиады школьников по технологии УДЕ академика РАО П.М.Эрдниева в 2016-2017 у.г.

Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 6 класс.

1. **Например:** 20,16 + 20,16 + 20,16 + 201,6 + 201,6 = 463,68 или 2,016 + 2,016 + 2,016 + 20,16 + 20,16 = 46,368.
2. **Ответ:** На 30%.Пусть за год выпуск снижался на х %. Приняв исходный объём выпуска продукции за 1, получим, что через год выпуск продукции составил $\alpha = 1 - x/100$, а через два года – α^2. Отсюда $\alpha^2 = 1 - 0{,}51 = 0{,}49$, то есть $\alpha = 0{,}7$.(При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3. **Ответ:**

	12 л	5 л	8 л
1	12	0	0
2	4		8
3	4	5	3
4	**9**	**0**	**3**
5	9	3	0
6	1	3	8
7	1	5	6
8	**6**	**0**	**6**

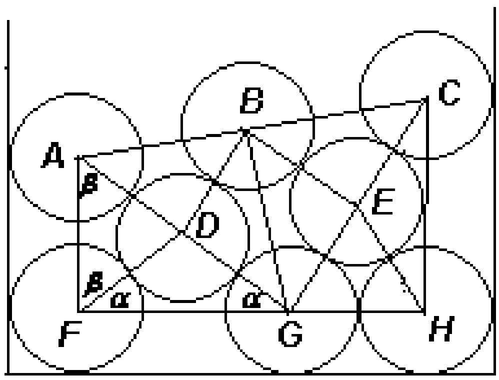
4. **Ответ:** 5 учеников. Предположение, что все ученики одного возраста, не влияет на средние возраста и, значит, на ответ. При этом предположении возраст ученика на 4 года меньше среднего возраста всех присутствующих. Чтобы "уравновесить" 20 лет "превышения" учителя, учеников должно быть 20 : 4 = 5.
5. **Ответ:**



Третий этап IX республиканской олимпиады школьников по технологии УДЕ академика РАО П.М.Эрдниева в 2016-2017 у.г.

Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 7 класс.

1. **Ответ:** Например, так: 1-2-3-4-(5-6-7)=0.
2. **Ответ:** На 30%.Пусть за год выпуск снижался на x %. Приняв исходный объём выпуска продукции за 1, получим, что через год выпуск продукции составил $\alpha = 1 - x/100$, а через два года – α^2. Отсюда $\alpha^2 = 1 - 0,51 = 0,49$, то есть $\alpha = 0,7$. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3. **Ответ:** $32^2 = 1024$ клетки. Задача сводится к решению в натуральных числах уравнения $x^2 - y^2 = 124$, которое можно переписать в виде $(x - y)(x + y) = 124$. Хотя бы один из множителей левой части чётен, поэтому x и y имеют одинаковую четность, значит, оба числа $x - y$ и $x + y$ чётны. Единственный способ разложить число 124 на два чётных сомножителя – это $2 \cdot 62$. Значит сумма чисел x и y равна 62, а разность – 2, откуда $x = 32$, $y = 30$.
4. **Ответ: 12/19.** Пусть число супружеских пар на острове равно N. По условию на острове 5/3N женщин и 3/2N мужчин. Всего на острове 5/3N + 3/2N = 19/6N жителей, а в браке состоит 2N. Искомая доля равна 2 : 19/6 = 12/19.
5. **Ответ:** 1 способ. Обозначим центры шаров и соединим их попарно так, как показано на рисунке. Имеем: $DA = DF = DG = 2r$, где r – радиус шара. Точки A, F, G и B лежат на окружности с центром D и радиусом $2r$, поэтому AG – диаметр и угол ABG – прямой. Аналогично, угол CBG – прямой. Следовательно, $\angle ABG + \angle CBG = 180°$, что и требовалось. 2 способ. Четырехугольник BDGE –квадрат. $\angle ABD = \angle EBC = 45°$ Следовательно, $\angle ABD + \angle DBE + \angle EBC = 180°$, что и требовалось.



Третий этап IX республиканской олимпиады школьников по технологии УДЕ академика РАО П.М.Эрдниева в 2016-2017 у.г.

Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 8 класс.

1. **Ответ:** 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 13, 14.Рассмотрим сумму десяти возможных сумм по 9 чисел. Так как каждое из исходных чисел входит в эту сумму 9 раз, то она делится на 9. Сумма девяти сумм, заданных в условии, равна 813, то есть даёт остаток 3 при делении на 9. Следовательно, неизвестная сумма при делении на 9 даёт остаток 6. Из девяти заданных сумм этому условию удовлетворяет только 87, значит, сумма десяти исходных чисел равна (813 + 87) : 9 = 100. Вычитая из числа 100 заданные суммы и учитывая, что 87 повторится дважды, получим ответ.
2. **Ответ:** При удорожании коммунальных услуг на 100%, общая сумма увеличилась бы на 70%. А если бы электричество подорожало на 100%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 20%. Значит, в общем платеже на коммунальные услуги приходится 70%, а на электричество — 20%. Поэтому на телефон приходятся оставшиеся 10%. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3. **Ответ:** 4 и 6 лет. Пусть одному сыну m, а другому – n лет. По условию mn + m + n = 34. Отсюда (m + 1) (n + 1) = 35. m + 1 и n + 1 – делители числа 35, отличные от 1. Значит, одно из этих чисел равно 5, а другое – 7.
4. **Ответ: –30.**

   Пусть трёхчлен имеет вид $ax^2 + bx + c$, а его корни равны m и n. По теореме Виета $c = amn$, $b = –a(m + n)$.
   Отсюда видно, что c делилось по крайней мере на три других числа. Но на доске осталась *лишь одна* пара чисел, одно из которых делится на другое: 2 и 4. Значит, было стёрто число c. Так как b делится на a, то $a = 2$, $b = 4$, числа 3 и –5 – корни, а $c = amn = 2\cdot3\cdot(–5) = –30$.
5. **Ответ:** при h = 1. Пусть h – высота трапеции, $2x+h\sqrt{3}$ – сумма оснований. Тогда большая боковая сторона трапеции равна $2h$, а периметр $3h+2x+h\sqrt{3} = 6$.
   Площадь трапеции равна $$S=\frac{2x+h\sqrt{3}}{2}h=\frac{6-3h}{2}h=\frac{3}{2}\left(1-(h-1)^2\right)$$
   причём максимальное значение достигается при $h = 1$.

Третий этап IX республиканской олимпиады школьников по технологии УДЕ академика РАО П.М.Эрдниева в 2016-2017 у.г.

Ответы к олимпиадным заданиям по математике (УДЕ) 9 класс.

1. **Ответ: а) 44800, б) 7.**

   а) В результате расстановки скобок данное выражение можно будет представить в виде дроби, где некоторые из данных чисел попадут в числитель, а другие – в знаменатель. Очевидно, при любой расстановке скобок число 10 попадет только в числитель, а 9 – только в знаменатель. Поэтому, чтобы получить наибольшее возможное число, надо все остальные числа поместить в числитель. Это возможно, и потому наибольшее значение равно

   10 : (9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1) = 44800 .

   б) Для того, чтобы значение выражения было целым, после расстановки скобок и записи полученного выражения в виде обыкновенной дроби число 7 должно оказаться в числителе. Следовательно, значение данного выражения – не меньше чем 7. Это достигается, например, так:

   10: 9 : (8 : 7 : (6 : (5 : 4 : (3 : 2 : 1)))) = (10·7·6·4·3) : (9·8·5·2·1) = 7.

2. **Ответ:** 120 %.

   Пусть сумма кредита составляет S у. е., а процентная ставка по кредиту $x\%$. К концу первого года сумма долга Очира в банк с учетом начисленных процентов составила $(1+0,01x)S$ у. е.

   После возвращения банку 3/4 части от суммы долга долг Очира на следующий год составил $\frac{1}{4}(1+0,01x)S$ у. е.

   На эту сумму в следующем году вновь начислены проценты. Сумма долга Очира к концу второго года погашения кредита с учетом процентной ставки составила $\frac{1}{4}(1+0,01x)^2S$ у. е. По условию задачи эта сумма равна $1,21S$ у. е.

   Решим уравнение $\frac{1}{4}(1+0,01x)^2S = 1,21S$ на множестве положительных чисел.

$$(1+0,01x)^2 = 4\cdot 1,21 \Leftrightarrow 1+0,01x = 2\cdot 1,1 \Leftrightarrow 0,01x = 1,2 \Leftrightarrow x = 120.$$

(При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).

3. **Ответ: 2.** Абсцисса точки пересечения графика с осью OX равна $-(1+{}^1/_k)$. Ордината точки пересечения с осью OY равна $k+1$. Следовательно, $S_{ABO} = ½\, OA\cdot OB = ½\,(k+1)(1+{}^1/_k) = ½\,(2+k+{}^1/_k)$. Наименьшее значение выражения $k+{}^1/_k$ достигается при $k=1$, следовательно, наименьшая возможная площадь треугольника ABO равна 2.

4. Ответ: а) да; б) нет; в) при $n = 5$. **Решение.**

   а) Пусть $a_1 = 3$ и $a_2 = 1$. Тогда $a_3 = 3 + 1 = 4$, $a_4 = 1 + 4 = 5$, $a_5 = 4 + 5 = 9$ и $5a_5 = 9a_4$.

   б) Предположим, что $5a_5 = 7a_4$. Тогда $a_5 = 7a$ и $a_4 = 5a$, где $a = \frac{a_5}{7} > 0.$
   Имеем $a_3 = a_5 - a_4 = 2a$, $a_2 = a_4 - a_3 = 3a$ и $a_1 = a_3 - a_2 = -a < 0$. Получаем противоречие.

   в) Пример последовательности 3, 3, 6, 9, 15, 24,... показывает, что равенство $3na_{n+1} = (n^2-1)a_n$ может выполняться при $n = 5$.

   Действительно, для такой последовательности выполнены условия задачи и $15a_6 = 24a_5$.

   Пусть n ≥ 6 и $3na_{n+1} = (n^2-1)a_n$. Положим $a = \frac{a_n}{3n} > 0.$ Тогда $a_n = 3na$ и $a_{n+1} = (n^2-1)a.$

Имеем

$$a_{n-1} = a_{n+1} - a_n = (n^2 - 3n - 1)a;$$
$$a_{n-2} = a_n - a_{n-1} = (-n^2 + 6n + 1)a;$$
$$a_{n-3} = a_{n-1} - an - 2 = (2n^2 - 9n - 2)a;$$
$$a_{n-4} = a_{n-2} - a_{n-3} = -3(n^2 - 5n - 1)a.$$

Так как $a_{n-4} > 0$, то $n^2 - 5n - 1 < 0$. Следовательно, $n \geq 6$. Полученное противоречие показывает, что при $n \geq 6$ равенство $3na_{n+1} = (n^2 - 1)a_n$ выполняться не может.

При оценивании необходимо учитывать разбалловку: а) 1 балл. б) 2 балла., в) 4 балла.

5. **Ответ:** квадрат. Пусть a и b — длины сторон параллелограмма, α — острый угол между его сторонами, S — площадь, d — наибольшая диагональ. Тогда $d^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$ и $ab\sin\alpha = S$. Поэтому $d^2 \geq a^2 + b^2$ и $ab \geq S$, причём в обоих случаях равенство достигается лишь при $\alpha = 90^\circ$. Далее, $a^2 + b^2 \geq 2ab$, поэтому $d^2 \geq 2S$, причём равенство достигается лишь в том случае, когда $a = b$ и $\alpha = 90^\circ$, т.е. когда параллелограмм является квадратом.

Третий этап IX республиканской олимпиады школьников по технологии УДЕ академика РАО П.М.Эрдниева в 2016-2017 у.г.

Ответы на олимпиадные задания по математике (УДЕ) 10 класс

1. **Ответ:** 1, 2 и 3. Наименьший угол треугольника не превосходит 60°, поэтому его тангенс может равняться только 1. $(\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} < 2)$. Значит, сумма двух оставшихся углов равна 135°.

   Пусть tg α = m, tg β = n. Тогда $\frac{m+n}{1-mn} = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$,

   то есть $m + n = mn - 1$. Записав это уравнение в виде $(m - 1)(n - 1) = 2$, видим, что один из множителей равен 1, а второй 2.
2. **Ответ:** 60%. Предложение «Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину» означает: Батр взятую сумму, без учета процентов, возвращал равными долями.

Общая сумма, уплаченная Батром банку сверх кредита, обусловлена только применением процентной ставки.

В первом месяце эта часть заплаченной суммы составляла $0,12S$, во втором — $0,12 \cdot \frac{8}{9}S,$ в третьем — $0,12 \cdot \frac{7}{9}S, \ldots,$ в восьмом — $0,12 \cdot \frac{2}{9}S,$ наконец, в последнем — $0,12 \cdot \frac{1}{9}S.$

Всего за 9 месяцев:

$$0,12S \cdot \left(1 + \frac{8}{9} + \frac{7}{9} + \ldots + \frac{1}{9}\right) = 0,12S \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{9}\right)}{2} \cdot 9 = 0,12S \cdot \frac{9+1}{2} = 0,6S.$$

Искомое процентное отношение есть 60 $(0,6S : S \cdot 100)$.

(При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).

3. Ответ: а) 44; б) отрицательных; в) 17. **Решение.**

   Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $4k - 8l + 0 \cdot \mathrm{m} = -3(k + l + m)$.

   а) Заметим, что в левой части приведённого выше равенства каждое слагаемое делится на 4, поэтому $k + l + m$ — количество целых чисел — делится на 4. По условию $40 < k + l + m < 48$, поэтому $k + l + m = 44$. Таким образом, написано 44 числа.

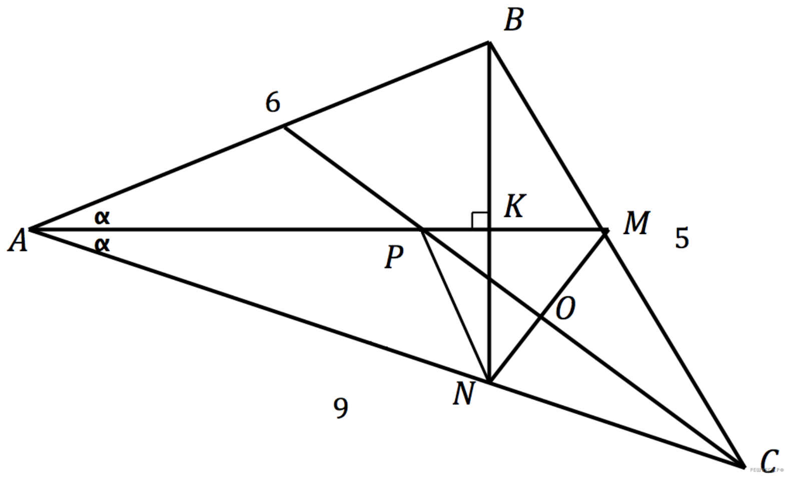
   б) Приведём равенство $4k - 8l = -3(k + l + m)$ к виду $5l = 7k + 3m$. Так как $m \geq 0$, получаем, что $5l \geq 7k$, откуда $l > k$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

   в) Подставим $k + l + m = 44$ в правую часть равенства $4k - 8l = -3(k + l + m)$, откуда $k = 2l - 33$. Так как $k + l \leq 44$, получаем: $3l - 33 \leq 44$; $3l \leq 77$; $l \leq 25$; $k = 2l - 33 \leq 17$, то есть положительных чисел не более 17.

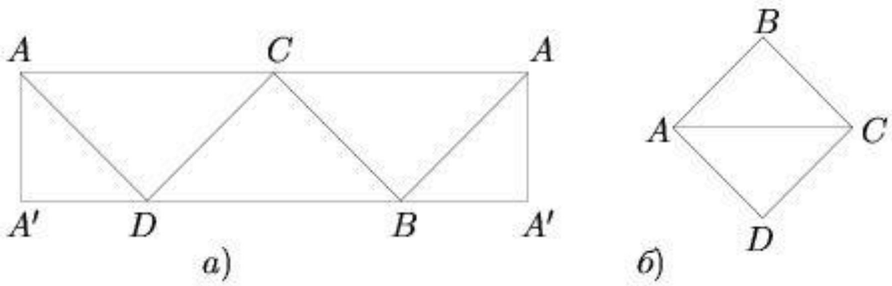
   в) Приведём пример, когда положительных чисел ровно 17. Пусть на доске 17 раз написано число 4, 25 раз написано число −8 и два раза написан 0. Тогда указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи. При оценивании необходимо учитывать разбалловку: а) 2 балла. б) 2 балла., в) 3 балла.
4. **Ответ:** 3 : 1. а) Обозначим за K точку пересечения отрезков AM и BN. Треугольник ABN равнобедренный, так как в нем AK является биссектрисой и высотой. Следовательно AK является и медианой, то есть K — середина BN. Получаем, что $AN = AB = 6$, откуда $NC = AC - AN = 3$.

Рассмотрим треугольник *ABC*, биссектриса делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам: *BM* : *MC* = *AB* : *AC*, учитывая, что длина *BC* равна 5, получаем: *BM* = 2; *MC* = 3.
В треугольнике *MNC* стороны *NC* и *MC* равны, следовательно, треугольник *MNC* — равнобедренный, с основанием *MN*. Значит, биссектриса угла *C* также является медианой и высотой. Таким образом, получаем, что биссектриса угла *C* делит отрезок *MN* пополам.

б) Рассмотрим треугольник *PMN*: отрезок *PO* перпендикулярен прямой *MN* и делит её пополам, следовательно, треугольник *PMN* — равнобедренный с основанием *MN*. Значит, *PM* = *PN* и отношение *AP* : *PN* = *AP* : *PM*.
В треугольнике *AMC* *CP* — биссектриса, поэтому *AP* : *PM* = *AC* : *MC* = 3 : 1.



5. Да, можно. Отметим на одной кромке кольца диаметрально противоположные точки A и C, а на другой — диаметрально противоположные точки B и D, повернутые относительно A и C на 90. На рис. а) изображен прямоугольник, получаемый из кольца разрезанием по образующей цилиндра . Сложив цилиндр по линиям AB, BC, CD иDA, получим квадрат площади 2



Третий этап IX республиканской олимпиады школьников по технологии УДЕ академика РАО П.М.Эрдниева в 2016-2017 у.г.

Ответы на олимпиадные задания по математике (УДЕ) 11 класс

1. **Ответ:** 45. Воспользуемся известным тождеством tg α + tg (α + 60°) + tg (α – 60°) = 3 tg 3α (его можно проверить, выразив обе части через tg α). Из него следует, что tg 1° + tg 61° + tg 121° = tg 1° + tg(1° + 60°) + tg(1° – 60°) = 3 tg 3°, tg 5° + tg 65° + tg 125° = 3 tg 15°, и т. д., поэтому вся сумма равна 3(tg 3° + tg 15° + ... + tg 171°). Аналогично разбив полученную сумму на "тройки", получим, что она равна 9(tg 9° + tg 45° + tg 81° + tg 117° + tg 153°) = 9 + 9(tg 9° + ctg 9° – ctg 27° – tg 27°), после чего остается найти сумму tg 9° + ctg 9° – ctg 27° – tg 27° =
$$= \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = \frac{2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = \frac{4\sin 18^\circ \cos 36^\circ}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = 4\,.$$
9 + 9(tg 9° + ctg 9° – ctg 27° – tg 27°)=45.
2. **Ответ: 3 993 000 рублей.**

Пусть сумма кредита равна a, ежегодный платеж равен x рублей, а годовые составляют k %. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $m = 1 + 0{,}01k$. После первой выплаты сумма долга составит: $a_1 = am - x$. После второй выплаты сумма долга составит:

$$a_2 = a_1 m - x = (am - x)m - x = am^2 - mx - x = am^2 - (1+m)x.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга:

$$a_3 = am^3 - \left(1 + m + m^2\right)x = am^3 - \frac{m^3-1}{m-1}\cdot x.$$

По условию тремя выплатами Сергей должен погасить кредит полностью, поэтому $am^3 - \dfrac{m^3-1}{m-1}\cdot x = 0,$ откуда $x = \dfrac{am^3(m-1)}{m^3-1}.$ При a = 9 930 000 и k = 10, получаем: m = 1,1 и

$$x = \frac{9930000\cdot 1{,}331\cdot 0{,}1}{0{,}331} = 3993000 \text{ (рублей)}.$$

(При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).

3. **Ответ:** Ответ: а) a = 7, b = 5, c = 2, d = 1; б) нет; в) 248.

Решение.

а) Из условия получаем:

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 - a - b - c - d = 4 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) + (c-d)(c+d) - a - b - c - d = 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a-b-1)(a+b) + (c-d-1)(c+d) = 4.$$

Поскольку $a + b + c + d = 15 > 4,$ получаем: $a = b + 1$ или $c = d + 1.$

В первом случае из равенства $(c-d-1)(c+d) = 4,$ находим $c + d = 4$ и $c - d - 1 = 1,$ откуда получаем: $a = 6,\ b = 5,\ c = 3$ и $d = 1.$

Второй случай не реализуется, поскольку $a + b > \dfrac{15}{2},$ а $(a-b-1)(a+b) = 4.$

б) Из условия получаем:

$$a^2-b^2+c^2-d^2=a+b+c+d \Leftrightarrow (a-b)(a+b)+(c-d)(c+d)=a+b+c+d \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a-b-1)(a+b)+(c-d-1)(c+d)=0.$$

Поскольку $a>b$, получаем, что $a \geq b+1$, то есть $a-b-1 \geq 0,\ a+b>0$. Аналогично, $c-d-1 \geq 0,\ c+d>0$, последнее равенство выполняется только при $a=b+1$ и $c=d+1$. Значит, $2b+2d+2=23$, что невозможно.

в) Из равенства $a^2-b^2+c^2-d^2=a+b+c+d$ получаем: $a=b+1,\ c=d+1$. Значит, $2a+2d=1200;\ d=600-a$. Получаем четвёрку чисел $(a;\ b;\ c;\ d)=(a;\ a-1;\ 601-a;\ 600-a)$. Поскольку $b>c$, получаем: $a>301$. Кроме того, $d>0$, откуда $a<600$.

Значит, a принадлежит промежутку (301; 600). Более того, для любого целого a из этого промежутка найденная четвёрка чисел удовлетворяет условию задачи. Таким образом, a может принимать 298 значений.

Ответ: а) $a=6$, $b=5$, $c=3$, $d=1$; б) нет; в) 298.

При оценивании необходимо учитывать разбалловку: а) 2 балла. б) 2 балла., в) 3 балла.

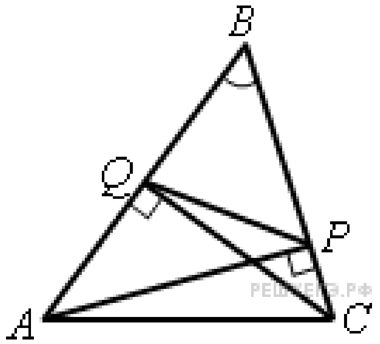
4. Ответ: $\dfrac{16}{\sqrt{3}}$.

а) Углы APC и AQC — прямые, значит, точки A, Q, P и C лежат на одной окружности с диаметром AC, и, следовательно, равны и вписанные углы PAC и PQC этой окружности, опирающиеся на дугу PC, что и требовалось доказать.

б) Прямоугольные треугольники ABP и CBQ имеют общий угол ABC, следовательно, они подобны, откуда $\dfrac{BQ}{BP}=\dfrac{BC}{BA}$ или $\dfrac{BQ}{BC}=\dfrac{BP}{BA}$, но тогда и треугольники BAC и BPQ также подобны, причем коэффициент подобия равен $\dfrac{BQ}{BC}=\dfrac{BP}{BA}=\cos\angle ABC$, откуда $AC=\dfrac{PQ}{\cos\angle ABC}=\dfrac{8}{\cos 60^\circ}=16.$

Тогда радиус R окружности, описанной около треугольника ABC равен

$$R=\frac{AC}{2\sin\angle ABC}=\frac{16}{2\sin 60^\circ}=\frac{16}{\sqrt{3}}.$$



5. Ответ: 125.

Задача сводится к решению в натуральных числах, бóльших 1, уравнения $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=98$. Очевидно, второй множитель больше первого. Кроме того, $x-y$ не делится на 3, поэтому $x^2+xy+y^2=(x-y)^2+3xy\equiv 1 \pmod 3$. Единственное разложение числа 98, удовлетворяющее этим условиям – это $2\cdot 49$. Поэтому $x^2+xy+y^2=49$, $x-y=2$, $xy=15$. Отсюда $x=5$, $y=3$.