

## IV республиканская олимпиада учителей математики «КУБ»

### 1 модуль «Малая олимпиада»

1. Докажите, что уравнение  $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 30$  не имеет решений в целых числах.
2. Дан треугольник  $ABC$  со сторонами  $BC=4$ ,  $AC=5$ ,  $AB=6$ . Доказать, что у треугольника  $ABC$  угол  $C$  в 2 раза больше угла  $A$ .
3. Около остроугольного треугольника  $ABC$  описана окружность,  $AN$  – ее диаметр. На сторонах  $AC$  и  $AB$  отмечены точки  $D$  и  $E$  соответственно так, что  $\angle BNE = \angle CND$ . Прямые  $DE$  и  $BC$  пересекаются в точке  $F$ ,  $K$  – середина отрезка  $DE$ . Окружность, описанная около треугольника  $ADE$ , вторично пересекает данную окружность в точке  $X$ . Докажите, что угол  $KXF$  – прямой.

### 2 модуль «Марафон ЕГЭ»

4. Три землекопа, работая одновременно, выкопали за час  $\frac{7}{10}$  траншеи. Известно, что землекопы работают с разной скоростью, причём каждый из них может выкопать такую траншею меньше чем за сутки, но за целое число часов. За какое время выкопает траншею каждый из них?
5. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A' B' C' D'$  точка  $E$  – середина ребра  $BB'$ . Найдите объем тетраэдра  $EAD'C$ , если  $AB = 2$ ;  $AD = 1$ ;  $AA' = \sqrt{3}$ .
6. Решите систему неравенств 
$$\begin{cases} 7 \log_9 (x^2 - x - 6) \leq 8 + \log_9 \frac{(x+2)^7}{x-3} \\ \frac{1}{3^{x-1}} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{3^{x+1}} < 52 \end{cases}$$

### 3 модуль «УДЕ»

7. Решите задачу:
  - а) Какую часть сотрудников фирмы надо уволить, чтобы при уменьшении фонда заработной платы на 20% повысить среднюю зарплату на 20%?
  - б) Составьте и решите обратную задачу.
8. Докажите теорему Вивиани (XVII век):
  - а) Сумма расстояний от произвольной точки внутри равностороннего треугольника до его сторон равна высоте треугольника.
  - б) Обобщите и докажите теорему Вивиани на трехмерное пространство для правильного тетраэдра.
9. Триада задач:
  - а) Доказать, что числа 2,3,4 единственная тройка последовательности  $n-1$ ,  $n$ ,  $n+1$ , которая определяет длины сторон тупоугольного треугольника.
  - б) Из трех последовательных натуральных чисел выбрать тройку, образующие длины сторон прямоугольных треугольников:  $n-1$ ,  $n$ ,  $n+1$ . Доказать, что эта тройка единственная.
  - в) Найти тройку нечетных последовательных чисел, образующих треугольник с углом  $120^\circ$ .

**Желаем удачи!**