Министерство образования и науки Республики Калмыкия

V республиканская олимпиада учителей математики «КУБ»

1. **Ответ:** 5.

Решение. Пусть в фестивале участвовало x англичан, y немцев и z французов. Тогда англичане сыграли 5x партий с немцами и 2x партий с французами, немцы сыграли 6y партий с англичанами и 4y партий с французами, а французы – 3z партий с англичанами и kz партий с немцами, где k – искомое число. Значит, должны выполняться равенства:

5x = 6y; 2x = 3z и 4y = kz. Следовательно, $k=\dfrac{4y}{z}=4\cdot\dfrac{\frac{5}{6}x}{\frac{2}{3}x}=5$.

Отметим, что из условия задачи также следует, что количество англичан, немцев и французов, участвовавших в фестивале, должно быть равно 6n, 5n и 4n соответственно, где n – любое натуральное число.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
3	Полное верное решение.
2	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
1	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
	Решение отсутствует.

2. **Ответ:** да, уложились.

Обозначим через x и y начальные производительности рабочих (в долях работы, выполненной за один день), а через t — время, затраченное ими на выполнение первой половины задания. По условию, при работе над его второй половиной их производительности равны, соответственно, $1{,}2x$ и $1{,}16y$. Поскольку на эту часть работы им потребовалось на один день меньше, получаем:

$$\begin{cases} t(x+y)=\dfrac{1}{2}, \\ (t-1)(1{,}2x+1{,}16y)=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}2x+1{,}16\left(\dfrac{1}{2t}-x\right)=\dfrac{1}{2(t-1)}, \\ y=\dfrac{1}{2t}-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{29-4t}{2t(t-1)}, \\ y=\dfrac{5(t-6)}{2t(t-1)}. \end{cases}$$

Поскольку $t>1$ и $x+y=\dfrac{1}{2t}$, система имеет решения, удовлетворяющие условию $0<x<1$, $0<y<1$ при $6<t<\dfrac{29}{4}$. На выполнение всего задания потребовалось $2t-1$ дней. Так как $11<2t-1<13{,}5$, то рабочие справились с выполнением задания в двухнедельный срок.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
3	Полное верное решение.
2	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
1	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в

	задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
	Решение отсутствует.

3. Ответ: 7

Ответ: 7 плоскостей.

Решение. Известно, что n плоскостей разбивают пространство не более, чем на $1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=\frac{n^3+5n+6}{6}$ частей. *) При этом равенство достигается в случае плоскостей так называемого «общего положения», когда никакие две плоскости не параллельны, никакие три плоскости не параллельны одной прямой, никакие четыре плоскости не проходят через одну точку.

При $n=6$ получаем, что частей не больше 42. Значит, шести плоскостей недостаточно. Покажем, что достаточно семи плоскостей.

Рассмотрим шесть плоскостей общего положения, разбивающих пространство на 42 части. Возьмем куб такого размера, чтобы внутри него лежали все точки пересечения троек выбранных плоскостей. Тогда этот куб также разбит на 42 части. Проведем седьмую плоскость настолько близко к одной из вершин куба, чтобы она рассекла ровно одну из 42 имеющихся частей на две. В результате куб и окажется разбит на 43 части.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
3	Полное верное решение.
2	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
1	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
	Решение отсутствует.

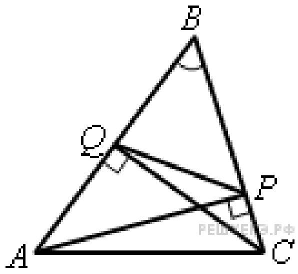
4. Ответ: $\frac{16}{\sqrt{3}}$.

а) Углы APC и AQC — прямые, значит, точки A, Q, P и C лежат на одной окружности с диаметром AC, и, следовательно, равны и вписанные углы PAC и PQC этой окружности, опирающиеся на дугу PC, что и требовалось доказать.

б) Прямоугольные треугольники ABP и CBQ имеют общий угол ABC, следовательно, они подобны, откуда $\frac{BQ}{BP}=\frac{BC}{BA}$ или $\frac{BQ}{BC}=\frac{BP}{BA}$, но тогда и треугольники BAC и BPQ также подобны, причем коэффициент подобия равен $\frac{BQ}{BC}=\frac{BP}{BA}=\cos\angle ABC$, откуда $AC=\frac{PQ}{\cos\angle ABC}=\frac{8}{\cos 60^\circ}=16.$

Тогда радиус R окружности, описанной около треугольника ABC равен

$$R=\frac{AC}{2\sin\angle ABC}=\frac{16}{2\sin 60^\circ}=\frac{16}{\sqrt{3}}.$$



Баллы	Правильность (ошибочность) решения
3	Полное верное решение.
2	Верное решение пункта б)
1	Верное решение пункта а)
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
	Решение отсутствует.

5. Ответ: 60%. Предложение «Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину» означает: Батыр взятую сумму, без учета процентов, возвращал равными долями. Общая сумма, уплаченная Батыром банку сверх кредита, обусловлена только применением процентной ставки. В первом месяце эта часть заплаченной суммы

составляла $0,12S$, во втором — $0,12\cdot\frac{8}{9}S,$ в третьем — $0,12\cdot\frac{7}{9}S,\ldots,$

в восьмом — $0,12\cdot\frac{2}{9}S,$ наконец, в последнем — $0,12\cdot\frac{1}{9}S.$

Всего за 9 месяцев:

$$0,12S\cdot\left(1+\frac{8}{9}+\frac{7}{9}+\ldots+\frac{1}{9}\right)=0,12S\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{9}\right)}{2}\cdot 9=0,12S\cdot\frac{9+1}{2}=0,6S.$$

Искомое процентное отношение есть 60.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
3	Полное верное решение.
2	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
1	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
	Решение отсутствует.

6. Ответ: а) 44; б) отрицательных; в) 17.

Решение.

Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $4k - 8l + 0 \cdot \mathrm{m} = -3(k + l + m)$.

а) Заметим, что в левой части приведённого выше равенства каждое слагаемое делится на 4, поэтому $k + l + m$ — количество целых чисел — делится на 4. По условию $40 < k + l + m < 48$, поэтому $k + l + m = 44$. Таким образом, написано 44 числа.

б) Приведём равенство $4k - 8l = -3(k + l + m)$ к виду $5l = 7k + 3m$. Так как $m \ge 0$, получаем, что $5l \ge 7k$, откуда $l > k$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

в) Подставим $k + l + m = 44$ в правую часть равенства $4k - 8l = -3(k + l + m)$, откуда $k = 2l - 33$. Так как $k + l \le 44$, получаем: $3l - 33 \le 44$; $3l \le 77$; $l \le 25$; $k = 2l - 33 \le 17$, то есть положительных чисел не более 17.

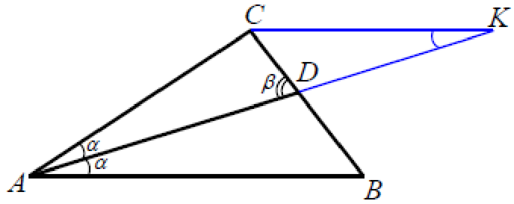
Приведём пример, когда положительных чисел ровно 17. Пусть на доске 17 раз написано число 4, 25 раз написано число −8 и два раза написан 0. Тогда указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

При оценивании необходимо учитывать разбалловку: а) 1 балл. б) 1 балл , в)1 балл.

7. **Ответ:** На 30%.Пусть за год выпуск снижался на x %. Приняв исходный объём выпуска продукции за 1, получим, что через год выпуск продукции составил α = 1 – x/100, а через два года – α2. Отсюда α2 = 1 – 0,51 = 0,49, то есть α = 0,7. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 1 балл, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-1 балл).

8. **3 варианта различных решений.**

Пусть отрезок AD — биссектриса треугольника ABC (см. рисунок) и требуется доказать, что $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB}$.



Решение 1. Пусть K — точка пересечения прямой AD и прямой, проходящей через вершину C и параллельной прямой AB. Тогда $\angle AKC = \angle BAK = \angle CAK$ и, значит, $CK = AC$. Треугольники DCK и DBA подобны. Следовательно, $\frac{DC}{DB} = \frac{KC}{AB} = \frac{AC}{AB}$, что и требовалось доказать.

Тема. «*Подобие треугольников*».

Решение 2. Треугольники ACD и ABD имеют общую высоту, проведенную из вершины A, следовательно $S_{ACD} : S_{BCD} = DC : DB$. С другой стороны, точка D лежит на биссектрисе угла BAC, значит, треугольники ACD и ABD имеют равные высоты, проведенные из вершины D, откуда $S_{ACD} : S_{BCD} = AC : AB$. Таким образом, $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB}$, что и требовалось доказать.

Тема. «*Площадь треугольника*».

Решение 3. Положим $\angle CAD = \angle BAD = \alpha$, $\angle ADC = \beta$. Тогда из треугольника ACD получаем $\frac{DC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\beta}$, а из треугольника ABD — $\frac{DC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\beta}$, откуда и следует доказываемое соотношение.

Тема. «*Теорема синусов*».

За каждое решение 1 балл.

9. **Ответ:** 187 и 119. Обе части равенства — многочлены степени 3, обращающиеся в нуль при x = 7, 11. Обозначим через Q квадратный трёхчлен во второй скобке в левой части. Он делится на x − 11, в силу вышесказанного. Следовательно, разность R(x) =Q(x)−x(x−11) есть многочлен степени 1, делящийся на x − 11, а, значит, получающийся из него умножением на постоянный множитель. Старший коэффициент разности R(x) равен 11 − 28 = −17.Следовательно, его свободный член равен 17 × 11 = 187. Итак, вместо многоточия в левой части стоит число 187. Аналогично, квадратный трёхчлен во второй скобке в правой части делится на x − 7. Вычитая из него x(x − 7), получим многочлен степени 1, который должен делиться на x − 7. Его старший коэффициент равен 7−24 = −17. Значит, его свободный член равен 17×7 = 119. Итак, на месте многоточия в правой части стоит число 119.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
3	Полное верное решение + составлен свой пример.

2	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. Отсутствует свой пример.
1	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
	Решение отсутствует.