1. $4^{n-1} + 7\cdot 2^{n} + 48 = n!$ отв: $n = 7$

$\forall n \in \mathbb{Z}$ левая часть $> 48 \to n! > 48 \to n \geq 5$

при $n = 5$ левая часть уравнения больше $5! = 120$

$n = 6$ л/ч уравнения $> 2^{10} = 1024 > 720 = 6!$

$n = 7$ $4^{6} + 7\cdot 2^{7} + 48 = 5040 = 7!$

т.о. $n = 7$ явл-ся решением

при $n \geq 8$ ур-ие не имеет решений, так как правая часть делится на 2^{7}, а левая часть – только на 2^{4}.

2. Заметим, что $2(a^2+b^2) = (a^2+b^2)(a^3-b^3) = (a^5-b^5) + a^2b^2(a-b)$

$\geq 4 + a^2b^2(a-b)$, $a^3 > b^3 \to a > b \to a^2b^2(a-b) \geq 0$

$2(a^2+b^2) \geq 4 \to (a^2+b^2) \geq 2$.

3. к векторы $\vec{m}\{a, 1\}$, $\vec{n}\{b, 3\}$, $\vec{p}\{c, 5\}$ и $\vec{q} = \vec{m} + \vec{n} + \vec{p}$

$\vec{q}\{a+b+c, 9\} = \{12; 9\}$

$|\vec{m}| + |\vec{n}| + |\vec{p}| \geq |\vec{m} + \vec{n} + \vec{p}|$

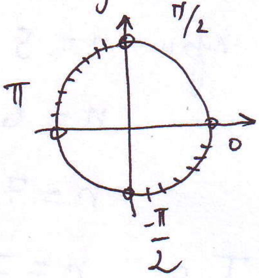
$\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+9} + \sqrt{c^2+25} \geq \sqrt{144+81} = 15$

равенство достигается, если $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{n} \uparrow\uparrow \vec{p}$ $b = 3a$, $c = 5a$

$a + b + c = 12$ получим $a = 4/3$, $b = 4$, $c = \frac{20}{3}$

4. отв: $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$

одз: $ctg\, x < 0$



$3\cos 2x + 5\cos x - 1 = 0$

$3(2\cos^2 x - 1) + 5\cos x - 1 = 0$

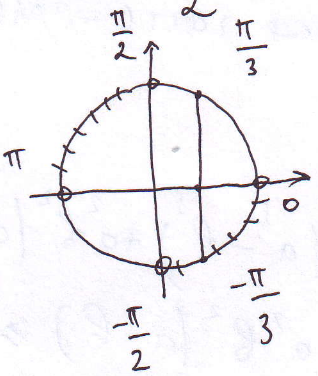
$6\cos^2 x + 5\cos x - 4 = 0$] $\cos x = t \in [-1;1]$

$6t^2 + 5t - 4 = 0$

$D = 25 + 96 = 121$

$t_{1,2} = \frac{-5 \pm 11}{12} = \frac{1}{2}; -\frac{16}{12}$

$\cos x = \frac{1}{2}$



5. отв: $(-1;0) \cup (0;\frac{1}{2}] \cup (1;2]$

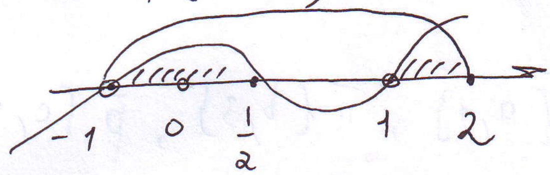
Решим 1 нер-во] $3^x = t > 0$ $3t^2 - 28t + 9 \le 0$

$t \in [\frac{1}{3}; 9] \to x \in [-1;2]$

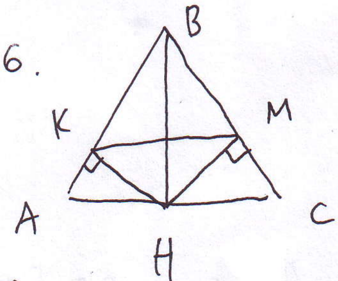
Решим 2 нер-во $\log_{x^2}(x-1)^2 \le 1$ одз: $x \ne \{0; \pm 1\}$

$\Updownarrow$

$(x^2-1)(1-2x) \le 0$



6.



1) около KBMH можно описать окр-ть, BH-диаметр

$\angle BKM = \angle BHM = 90 - \angle HBM = \angle BCA$

$\triangle MBK \sim \triangle ABC$ ($\angle B$-общий, $\angle BKM = \angle BCA$)

2) $r = \frac{1}{2} BH = 2$, $R = 5$ $\triangle MBK \sim \triangle ABC$ $k = \frac{2}{5}$

$\frac{S_{MBK}}{S_{ABC}} = \frac{4}{25}$ $\frac{S_{MBK}}{S_{AKMC}} = \frac{\frac{4}{25}}{1 - \frac{4}{25}} = \frac{4}{21}$

7. а) $91 + \ldots + 109 = 10^3$

б) $3375 = 15^3 \quad \div (a_n) \qquad S_{15} = 3375$

в прогрессии 15 членов

$a_8 = 15^2 = 225$

$a_1 = 211$

$a_{15} = 239$

Заметим, что средний член есть полный квадрат $3^2, 5^2, \ldots$

8. а) $\dfrac{a+b}{2} < \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \qquad a \neq b$

$$\frac{\sqrt{2005} + \sqrt{2007}}{2} < \sqrt{\frac{2005+2007}{2}} = 2\sqrt{2006}$$

б) $\sqrt{2007} > \sqrt{2005}$

$$\sqrt{2007} + \sqrt{2006} > \sqrt{2005} + \sqrt{2006}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2007} + \sqrt{2006}} < \frac{1}{\sqrt{2006} + \sqrt{2005}}$$

$$\sqrt{2007} - \sqrt{2006} < \sqrt{2006} - \sqrt{2005}$$

$$\downarrow$$

$$\sqrt{2005} + \sqrt{2007} < 2\sqrt{2006}$$

9. $3^2 + 4^2 = 5^2,\ 5^2 + 12^2 = 13^2 \to 3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$

$8^2 + 15^2 = 17^2,\ 17^2 + 144^2 = 145^2 \to 8^2 + 15^2 + 144^2 = 145^2$

$5^2 + 12^2 = 13^2,\ 13^2 + 84^2 = 85^2 \to 5^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2$