VII республиканская олимпиада учителей математики «КУБ»

Ключи к заданиям (очный тур)

1. **Ответ:** цифра 9. Однозначных чисел ровно 9, двузначных 99 - 9 = 90, трёхзначных 999 - 99 - 9 = 900 и т.д. Однозначные числа займут в выписанном ряду первые 9 мест, двузначные 90 * 2 = 180 мест, трёхзначные 900 * 3 = 2700 мест. Поэтому интересующая нас цифра принадлежит трехзначному числу. Цифры, принадлежащие не более чем трёхзначным числам, имеют номера от 1 до 9 + 180 + 2700 = 2889. Разность 2019 - 189 = 1830 нужно разделить на 3, тогда 1830:3 = 610. Интересующая нас цифра принадлежит 610-му трехзначному числу, т.е. числу 709. В этом числе интересующая нас цифра стоит на 3-м месте.

2. **Ответ:** $\frac{2i}{\pi}$. Решение: Используя формулу Эйлера, представим $-1 = e^{i\pi}$
$$\int_0^1 (-1)^x dx = \int_0^1 \left(e^{i\pi}\right)^x dx = \frac{e^{i\pi}}{i\pi} - \frac{1}{i\pi} = -\frac{2}{i\pi} = \frac{2i}{\pi}$$

3. **Ответ: 1,875.** Пусть начальная сумма кредита равна S_0, тогда переплата за первый год равна $\frac{x}{100}S_0.$ По условию, ежегодный долг перед банком должен уменьшиться равномерно. Этот долг состоит из двух частей: постоянной ежегодной выплаты, равной $S_0/15$, и ежегодной равномерно уменьшающейся выплаты процентов, равной
$$\frac{x}{100}S_0,\ \frac{14}{15}\cdot\frac{x}{100}S_0,\ \ldots,\ \frac{2}{15}\cdot\frac{x}{100}S_0,\ \frac{1}{15}\cdot\frac{x}{100}S_0.$$
Используя формулу суммы членов арифметической прогрессии, найдём полную переплату по кредиту:
$$\frac{x}{100}S_0\left(1+\frac{14}{15}+\ldots+\frac{2}{15}+\frac{1}{15}\right) = \frac{x}{100}S_0\cdot\frac{1+\frac{1}{15}}{2}\cdot 15 = \frac{2x}{25}S_0.$$
По условию общая сумма выплат на 15% больше суммы, взятой в кредит, тогда:
$$0,08xS_0 = 0,15S_0 \Leftrightarrow x = 1,875.$$

4. **Ответ:105.**

№2

$x(x-6) \geqslant (a+3)(|x-3|-3)$

(b_n) — г. п. $b_1 = 4$, $-3 < q < -1$

$x(x-6) = x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$

$\Rightarrow (x-3)^2 - 9 \geqslant (a+3)(|x-3|-3)$

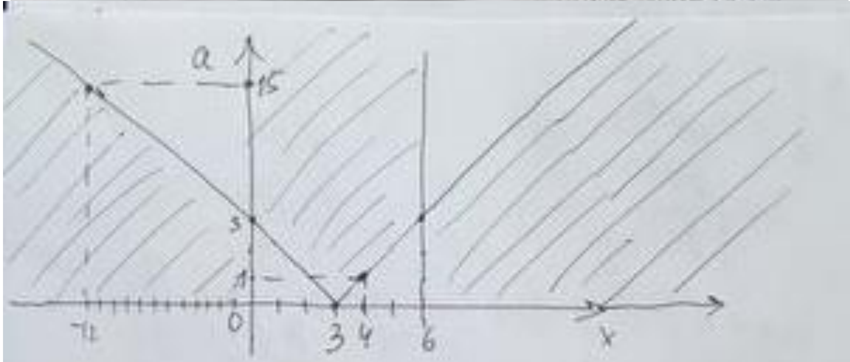
$(|x-3|-3)(|x-3|+3) - (a+3)(|x-3|-3) \geqslant 0$

$(|x-3|-3)(|x-3|+3-a-3) \geqslant 0$

$(|x-3|-3)(|x-3|-a) \geqslant 0$

Нули: $\left[\begin{array}{l} |x-3| = 3 \\ |x-3| = a \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ или } x = 6 \\ a = |x-3| \end{array}\right.$

На пл-ти Оха построим графики: $x = 0$, $x = 6$, $a = |x-3|$ и определим области, где выполн. неравенство



если $x \in [0;6]$, то $|x-3| \in [0;3] \Rightarrow |x-3| - 3 \leqslant 0$

$\Rightarrow |x-3| - a \leqslant 0 \Rightarrow a \geqslant |x-3|$

если $x < 0$ или $x > 6$, то $|x-3| - 3 > 0$

$\Rightarrow |x-3| - a > 0 \Rightarrow a < |x-3|$

т.к. $b_1 = 4$, то чтобы $4 \in$ реш., то $a \geqslant 1$

т.к. $-3 < q < -1$, то $-12 < b_2 < -3$

Нерав. строгое $\Rightarrow$ т. $\in$ граф. $\notin$ реш.

если $x = -12$, то $a = 15 \Rightarrow$ при $a \geqslant 15$ $x \notin$ решению нер.

$\Rightarrow a < 15 \Rightarrow a \in [1; 15)$

$\sum a_i = 1 + 2 + \dots + 14 = \frac{1+14}{2} \cdot 14 = 7 \cdot 15 = 105$

5. **Ответ: 518, 629, 481 и 592.** (Не найдена ошибка-0 баллов, найдена ошибка и приведено полное решение -7 баллов).

Комментарий. В решении допущена ошибка (решение неполное). Из условия задачи не следует, что все цифры искомого числа отличны от нуля, а это означает, что не все числа, получаемые перестановкой его цифр, являются трехзначными.

Верное решение. Пусть $x=\overline{abc}$ — искомое число.

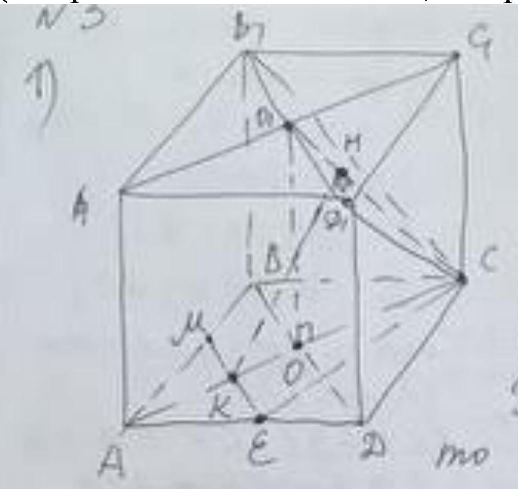
Если одна из цифр этого числа равна нулю, то лишь три числа, полученные из искомого перестановкой его цифр, являются трехзначными. Далее имеем: $\overline{ab0}+\overline{a0b}+\overline{ba0}+\overline{b0a}=211(a+b)$, и, согласно условию, $x=\frac{211(a+b)-x}{5}$, откуда $6x=211(a+b)$, т.е., x делится на 211. Среди трехзначных чисел, кратных 211, нет чисел, в записи которых присутствует ноль.

Если все цифры искомого числа отличны от нуля, то см. приведенное выше решение.

6. **Ответ:** 56. (1 верный способ-5 баллов, 2 верных способа-7 баллов).

N 5

1)



CE – бис. ∠ AD

$EM \parallel BD \Rightarrow EM \parallel (B_1CD_1)$

$EM \perp AC$ в т. K

$\Rightarrow |E; (B_1CD_1)| = |K; (B_1CD_1)|$

Т.к. CE – бис. то $\frac{DE}{AE} = \frac{CD}{AC} = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow AE = \sqrt{2}DE$, $AE + DE = AD$

$\sqrt{2}DE + DE = 72 \Rightarrow (\sqrt{2}+1)DE = 72$

$DE = \frac{72}{\sqrt{2}+1} \Rightarrow AE = \frac{72\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

$\frac{AK}{AE} = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow AK = \frac{72\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{72}{\sqrt{2}+1}$

$AC = 72\sqrt{2} \Rightarrow CK = 72\sqrt{2} - \frac{72}{\sqrt{2}+1} =$

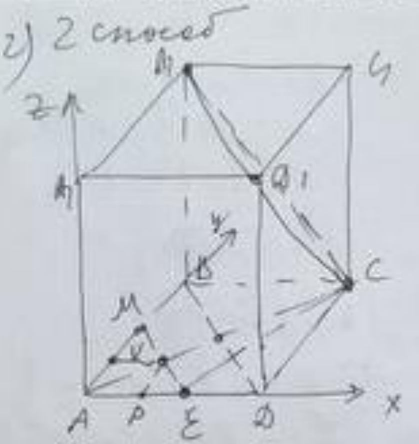
$= \frac{72\cdot 2 + 72\sqrt{2} - 72}{\sqrt{2}+1} = \frac{72(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1} = 72$

$KH \perp (B_1CD_1)$, где $H \in CO_1$, CO_1 – перес. (ACC_1) и (B_1D_1C), $(B_1D_1C) \perp (ACC_1)$ т.к. $B_1D_1 \perp A_1C_1$ и CO_1

$\sin KCH = \frac{KH}{KC} = \sin OCO_1 = \frac{OO_1}{O_1C} = \frac{63}{\sqrt{63^2 + \left(\frac{72\sqrt{2}}{2}\right)^2}}$

$= \frac{63}{81} = \frac{7}{9} \Rightarrow KH = \frac{7}{9}\cdot 72 = 56$

г) 2 способ



Введем сист. к-т
т. A – нач. к-т,
AD – ось x, AB – ось y
$C(72;\ 72;\ 0)$
$B_1(0;\ 72;\ 63)$
$D_1(72;\ 0;\ 63)$
Сост. ур. пл-ти (B_1D_1C):
$Ax+By+Cz+D=0$

$$\begin{cases} 72A+72B+D=0 \\ 0+72B+63C+D=0 \\ 72A+0+63C+D=0 \end{cases} \quad \begin{cases} D=-72A-72B \\ D=-72B-63C \\ D=-72A-63C \end{cases}$$

$$-72A-72B=-72B-63C$$

$$72A=63C \Rightarrow 8A=7C \Rightarrow A=\frac{7}{8}C$$

$$D=-72\cdot\frac{7}{8}C-63C=-126C$$

$$72B=-72A-D=-72\cdot\frac{7}{8}C+126C=63C$$

$$B=\frac{7}{8}C$$

$$\Rightarrow \frac{7}{8}Cx+\frac{7}{8}Cy+Cz-126C=0$$

$$7x+7y+8z-1008=0$$

$EM \parallel BD$, $EM \cap AC$ в т. K

$AK=\frac{72}{\sqrt{2}+1}$, $KP \perp AD \Rightarrow AP=\frac{72}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{72}{2+\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow K\left(\frac{72}{2+\sqrt{2}};\ \frac{72}{2+\sqrt{2}};\ 0\right)$$

3) применение:
Формула расстояния от т. $A(x_0;y_0;z_0)$ до пл. α: $Ax+By+Cz+D=0$

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$d=\frac{\left|7\cdot\frac{72}{\sqrt{2}+2}+7\cdot\frac{72}{\sqrt{2}+2}-1008\right|}{\sqrt{49+49+64}}=$$

$$=\frac{|1008-1008(2+\sqrt{2})|}{(\sqrt{2}+2)\sqrt{162}}=$$

$$=\frac{1008+1008\sqrt{2}}{9\sqrt{2}(\sqrt{2}+2)}=\frac{1008(1+\sqrt{2})}{9\cdot 2\cdot(1+\sqrt{2})}=$$

$$=56.$$

7. **Ответ: 8 км.** При проверке необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: полное верное решение прямой задачи 3 балла, составление текста обратной задачи -1 балл, полное верное решение обратной задачи-3 балла.

109. Пусть v_1 и v_2 — скорости первого и второго пешеходов соответственно, S — расстояние от A до B, x — расстояние, которое осталось пройти второму пешеходу, когда первый закончил переход. Тогда $\begin{cases} \dfrac{Sv_2}{2v_1} + 24 = S, \\ \dfrac{Sv_1}{2v_2} + 15 = S. \end{cases}$

Пусть $u = \dfrac{v_1}{v_2}$, тогда получаем $\begin{cases} 24 = S\left(1 - \dfrac{1}{2u}\right), \\ 15 = S\left(1 - \dfrac{u}{2}\right). \end{cases}$

Отсюда, разделив второе уравнение на первое, найдем u:

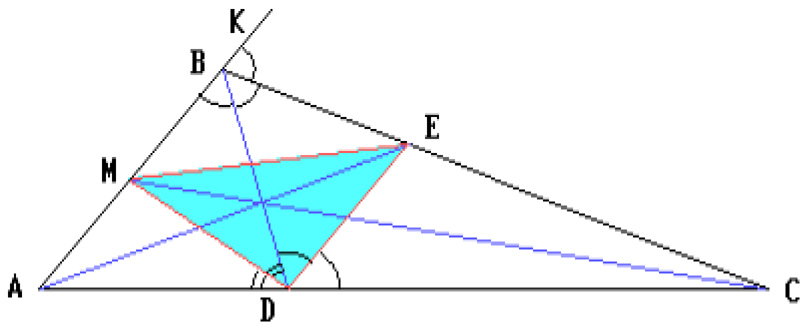
$\dfrac{15}{24} = \dfrac{1-\dfrac{u}{2}}{1-\dfrac{1}{2u}}$; $\dfrac{u(2-u)}{2u-1} = \dfrac{5}{8}$; $8u^2 - 6u - 5 = 0$; $u = \dfrac{5}{4}; -\dfrac{1}{2}$. Учитывая, что $u > 0$, $u = \dfrac{5}{4}$. Теперь из второго уравнения

$15 = S\left(1 - \dfrac{5}{8}\right)$, или $S = 40$ км.

Поскольку $\dfrac{Sv_2}{v_1} + x = S$, получаем, что $x = 8$ км. То есть второму пешеходу останется пройти 8 км.

8. **Доказательство:**

а) Пусть *AE*, *BD* и *CM* — биссектрисы треугольника *ABC* и $\angle ABC = 120°$. На продолжении стороны *AB* за точку *B* возьмём точку *K*. Поскольку $\angle EBK = 180° - \angle ABC = 180° - 120° = 60° = \angle DBE$, то *BE* — биссектриса угла *DBK*, смежного с углом *ABD*. Поэтому точка *E* равноудалена от прямых *AB* и *DB*, а т.к. точка *E* лежит на биссектрисе угла *BAC*, то она равноудалена от прямых *AB* и *CD*. Поэтому точка *E* равноудалена от сторон угла *BDC*. Значит, *DE* — биссектриса угла *BDC*. Аналогично *DM* — биссектриса угла *ADB*. Следовательно, $\angle MDE = 0{,}5(\angle ADB + \angle BDC) = 0{,}5 \cdot 180° = 90°$.



б) Проверка осуществляется векторно-координатным или координатным способом.
Верно решен пункт а) - 5 баллов.
Верно решен пункт б) -2 балла.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений..
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.