

Министерство образования и науки Республики Калмыкия
VIII республиканская олимпиада учителей математики «КУБ»

Ключи к заданиям (заочный тур)

- 1. Ответ: 28 часов, 21 час. Решение:** Обозначим скорости курьеров через u и v , а время от начала движения до встречи курьеров через t . Первому курьеру для прохождения всего пути нужно $t+16$ часов, а второму $t+9$. Расстояние между пунктами А и В можно выразить тремя различными способами:

$$(t+16)u, (t+9)v, t(u+v).$$

Получаем: $(t+16)u = t(u+v)$, откуда $16u = tv$, $t = 16 \frac{u}{v}$; (*)

$$(t+9)v = t(u+v), \text{ откуда } 9v = tu, t = 9 \frac{v}{u}. \text{ Отсюда } 16 \frac{u}{v} = 9 \frac{v}{u}, \frac{u^2}{v^2} = \frac{9}{16} \quad \frac{u}{v} = \frac{3}{4}.$$

Подставив найденное значение в выражение (*), имеем: $t = (16 \cdot 3)/4 = 12$.

Первому курьеру для прохождения всего расстояния необходимо $12+16=28$ часов, второму $12+9=21$ час.

- 2. Ответ: 1) 402, 403, 404, 405, 406; 2) 249, ..., 256; 3) 31, ..., 70. Решение:**

Рассмотрим арифметическую прогрессию $x, x+1, \dots, x+n$. Сумма равна 2020. По формуле получим уравнение $(2x+n)(n+1) = 4040 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$.

1) При $n=4$. Получим уравнение $2x+4=808$. Решим уравнение и получим $x=402$. Найдем остальные 4 числа 403, 404, 405, 406.

2) При $n=7$. Получим уравнение $2x+7=505$. Решим уравнение и получим $x=249$. Найдем остальные 7 чисел 250, ..., 256.

3) При $n=39$. Получим уравнение $(39+1)(2x+39) = 40 \cdot 101$. Решим уравнение $2x+39=101$, откуда получим $x=31$. Найдем остальные 39 чисел 32, ..., 70.

- 3. Ответ:** при $\alpha \in \left(0, \arccos \frac{\sqrt{11}}{6}\right)$ существует 4 треугольника. **Решение:** Обозначим

стороны треугольника через $a=5$, $b=6$ и c

- 1) Первый треугольник со сторонами и острым углом между ними $\alpha \in (0, 90^\circ)$.
2) Второй треугольник со сторонами и острым углом против стороны b . По теореме косинусов получим $36 = 25 + c^2 - 10c \cdot \cos \alpha$

$c^2 - 10c \cdot \cos \alpha - 11 = 0 \quad D = 4(25\cos^2 \alpha + 11) > 0$ при любом α . Так как $c_1 \cdot c_2 < 0$, то такой треугольник единственный $\alpha \in (0, 90^\circ)$.

3) Третий треугольник со сторонами и острым углом против стороны a . По теореме косинусов получим $25 = 36 + c^2 - 12c \cdot \cos \alpha$

$$c^2 - 12c \cdot \cos \alpha + 11 = 0 \quad D = 4(36\cos^2 \alpha - 11) \quad 36\cos^2 \alpha - 11 \geq 0 \quad |\cos \alpha| \geq \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha < -\frac{\sqrt{11}}{6} \\ \cos \alpha > \frac{\sqrt{11}}{6} \end{cases} \quad \text{С учетом того, что угол острый } \alpha \in (0, 90^\circ)$$

получим $\alpha \in \left(0, \arccos \frac{\sqrt{11}}{6}\right)$

Так как $c_1 \cdot c_2 > 0$, то таких треугольников два.

4. **Ответ:** $2020^2 = 1372^2 + 720^2 + 1296^2$, $2020^2 = 1220^2 + 720^2 + 1440^2$.

Решение: $2020 = a^2 + b^2 + c^2$. Можно считать, что $(a = 36, b = 20, c = 18) \quad a \geq b \geq c$, тогда $a^2 + b^2 - c^2 > 0$. Имеем:

$$n^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 = (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2) + 4b^2c^2 + 4a^2c^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2bc)^2 + (2ac)^2.$$

Итак, 1-ое число $= a^2 + b^2 - c^2 = 1296 + 400 - 324 = 1372$

2-ое число $= 2bc = 720$, 3-е число $= 2ac = 1296$

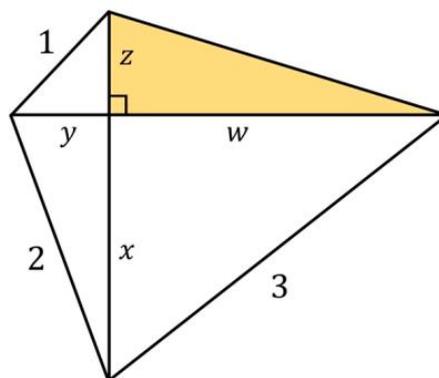
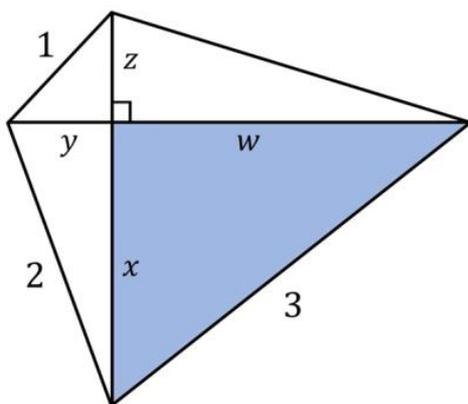
$$2020^2 = 1372^2 + 720^2 + 1296^2$$

Если взять $a = 36, b = 18, c = 20$, то получим еще одно решение $2020^2 = 1220^2 + 720^2 + 1440^2$.

5. **Ответ:** $\sqrt{6}$ или $\sqrt{12}$. **Решение:**

1) Обозначим через x, y, z, w отрезки диагоналей четырехугольника. $w^2 + z^2 = 6$

Тогда искомая длина стороны равна $\sqrt{6}$

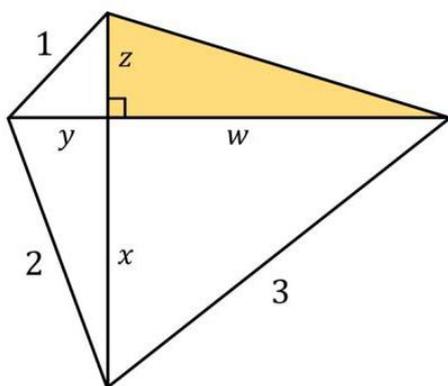


Gougu Theorem

$$w^2 + x^2 = 3^2$$

$$x^2 + y^2 = 2^2$$

$$y^2 + z^2 = 1^2$$

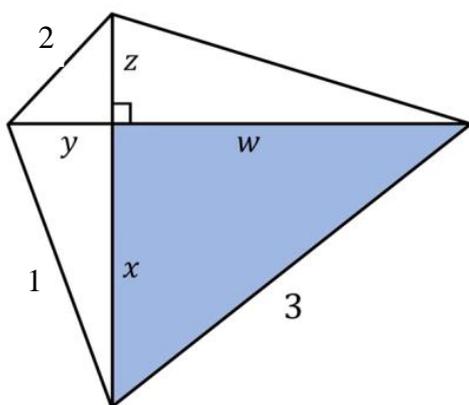


Gougu Theorem

$$\begin{aligned}
 &w^2 + x^2 = 3^2 \\
 &- [x^2 + y^2 = 2^2] \\
 &+ [y^2 + z^2 = 1^2] \\
 \hline
 &w^2 + z^2 = 3^2 - 2^2 + 1^2
 \end{aligned}$$

2) Обозначим через x, y, z, w отрезки диагоналей четырехугольника. $w^2 + z^2 = 12$

Тогда искомая длина стороны равна $\sqrt{12}$



Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений..
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

При оценивании задания №1 необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи - 1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла.