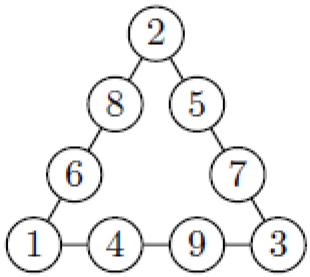
Муниципальный этап XI республиканской математической олимпиады школьников имени академика РАО П.М.Эрдниева в 2018-2019 учебном году

Решение
4 класс

1. Ответ: на рисунке

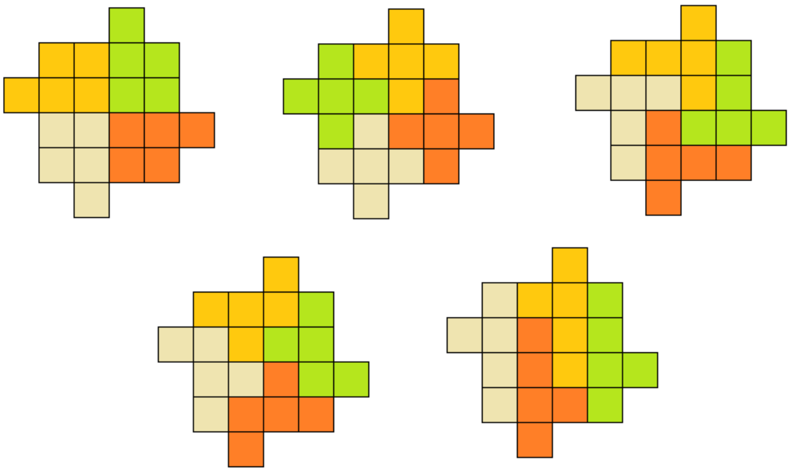


2. Ответ: **72 м.** Поскольку обратно белка бежит в два раза медленнее, то время, затраченное белкой на обратную дорогу, в два раза больше времени, которое она тратит на дорогу от дупла до орешника. Поэтому время, затраченное на дорогу от дупла до орешника, в три раза меньше времени, затраченного на всю дорогу, то есть равно 54 : 3 = 18 секунд. Следовательно, расстояние от дупла до орешника равно 18•4 = 72 м. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла).

3. Ответ: **7 кг.** Решение.
1. 35 – 21 = 14 кг. – масса половины апельсинов.
2. 14 • 2= 28 кг – масса всех апельсинов.
3. 35 – 28 = 7 кг – масса пустого ящика.

4. Ответ: **3 и 6, 4 и 4.** Решение. Пусть a и b – длины сторон прямоугольника, тогда P = 2(a + b) – его периметр, а S=ab - площадь. По условию: ab =2(a + b). Методом перебора находим стороны 3 и 6 , 4 и 4. (1 способ - 4 балла, 2 способа-7 баллов).

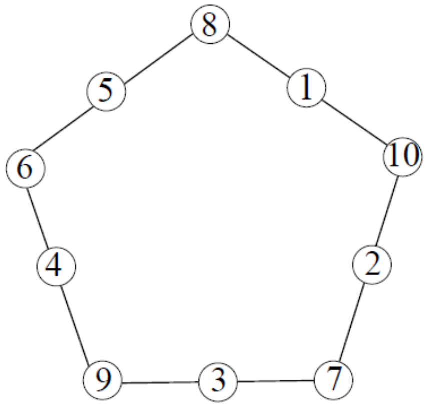
5. Ответ: на рисунке. (1 способ -1 балл, 2 способа-3 балла, 3 способа-5 баллов, 4 способа-7 баллов).



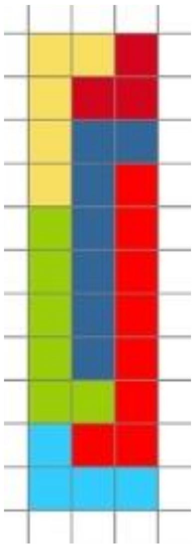
Муниципальный этап XI республиканской математической олимпиады школьников имени академика РАО П.М.Эрдниева в 2018-2019 учебном году

Решение
5 класс

1. Ответ: на рисунке



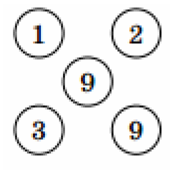
2. Ответ: **2250 метров.** 20 минут — это 20 • 60 = 1200 секунд. Расстояние измеряем в метрах. Обозначьте время от гнезда до орешника за x , обратно 1200-x. Расстояние от орешника до гнезда буквой 5x=3(1200-x) x=450 и тогда расстояние 450*5=2250 м. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла).
3. Ответ: **2 рубля.** Составим пропорцию по условию задачи: 10 лимонов – x руб.; x лимонов – 40 руб. Таким образом, $10 : x = x : 40$, то есть $x^2 = 400$; $x = 20$. Один десяток лимонов стоят 20 рублей, значит, один лимон стоит 2 рубля.
4. Ответ: **12 см, или 13 см, или 14 см**. Решение. Пусть a и b – длины сторон прямоугольника, тогда $P = 2(a + b)$ – его периметр. По условию: $2a + b = 9,5$. Далее возможны три случая:
   1) $2a = 7$, тогда $a = 3,5$; $b = 2,5$; $P = 12$ (см).
   2)$2b = 7$, тогда $b = 3,5$; $a = 3$; $P = 13$ (см).
   3) $a + b = 7$, тогда $a = 2,5$; $b = 4,5$; $P = 14$ (см).
   1 способ -3 балла, 2 спсоба-5 баллов, 3 способа-7 баллов.
5. Ответ: на рисунке.



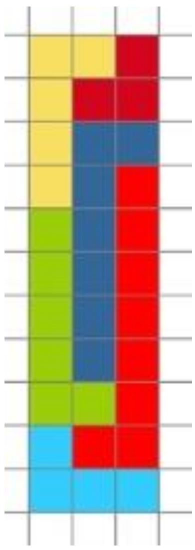
Муниципальный этап XI республиканской математической олимпиады школьников имени академика РАО П.М.Эрдниева в 2018-2019 учебном году

Решение
6 класс

1. Ответ: на рисунке



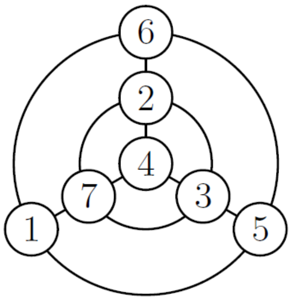
2. Ответ: **80 км/ч.** Решение. При скорости 40 км/час он тратит на 1 км 1,5 минуты, значит чтобы проехать 1 км на минуту быстрее ему нужно затратить на 1 км 0,5 минуты, соответственно 1,5 / 0,5 = 3, 3 * 40 = 120 км/час. 120 - 40 = 80 км/час. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла).
3. Ответ: **50 рублей.** Составим пропорцию по условию задачи: 20 лимонов – x руб.; x лимонов – 500 руб. Таким образом, $20 : x = x : 500$, то есть $x^2 = 10000$; $x = 100$. Два десятка лимонов стоят 100 рублей, значит, один десяток стоит 50 рублей.
4. Ответ: **134.** Решение . Пусть Батр приволок n,m,p соответственно, 2-, 3- и 4-метровых брёвен, тогда по условию $n+m+p=26$; $2n+3m+4p=80$. k-метровое бревно на полуметровые соленья распиливается 2k-1 распилами, значит, нужно вычислить величину $3n+5m+7p$. Из первых двух уравнений найдём: $m=28-2p$; $n=p-2$;
   $3(p-2) + 5(28-2p) + 7p = 140-6 = 134$.
   Арифметическое решение. Длина бревен не имеет значения, лишь бы была полуцелой. На самом деле можно считать, что Батр принес одно 80 метровое бревно, которое уже успел распилить на 26 бревен. Для 80 метров надо 159 распилов, но 25 он уже сделал. Откуда ответ 159 - 25 = 134.
5. Ответ: на рисунке.



Муниципальный этап XI республиканской математической олимпиады школьников имени академика РАО П.М.Эрдниева в 2018-2019 учебном году

Решение
7 класс

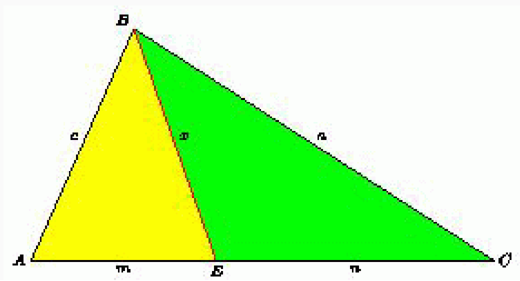
1. Ответ: на рисунке.



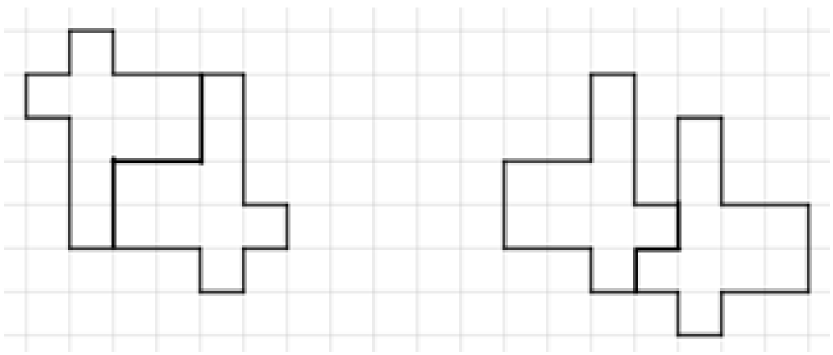
2. Ответ: **на 50%.** Решение. При скорости 40 км/час он тратит на 1 км 1,5 минуты, значит чтобы проехать 1 км на полминуты быстрее ему нужно затратить на 1 км 1 минуту, соответственно 1,5 * 40 = 60 км/час. 120 - 40 = 20 км/час составляет 50% от 40 км/ч.. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла).

3. Ответ: **увеличилась на 200.** Решение. Пусть даны числа: $a_1 - 1$; $a_2 - 1$; ...; $a_{100} - 1$. По условию: $(a_1 - 1)^2 + (a_2 - 1)^2 + ... + (a_{100} - 1)^2 = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{100}^2$. Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим: $2(a_1 + a_2 + ... + a_{100}) = 100$. Тогда $(a_1 + 1)^2 + (a_2 + 1)^2 + ... + (a_{100} + 1)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{100}^2) = 2(a_1 + a_2 + ... + a_{100}) + 100 = 200$.

4. **Ответ: 3,5 см.** Решение: $15 + 17 = P_{ABE} + P_{BCE} = P_{ABC} + 2BE = 25 + 2BE$. Следовательно, $BE = (32 - 25) : 2 = 3,5$.



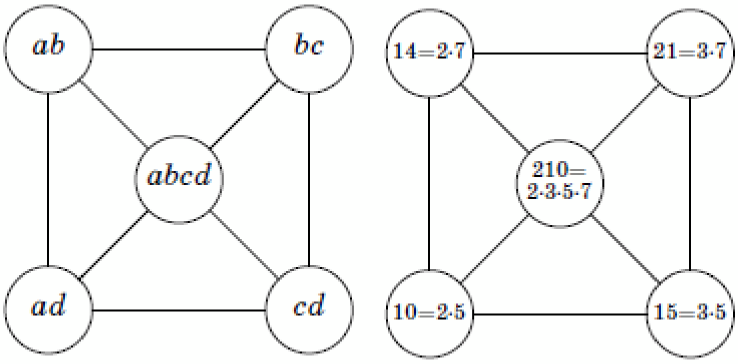
5. Ответ: на рисунке.



Муниципальный этап XI республиканской математической олимпиады школьников имени академика РАО П.М.Эрдниева в 2018-2019 учебном году

Решение
8 класс

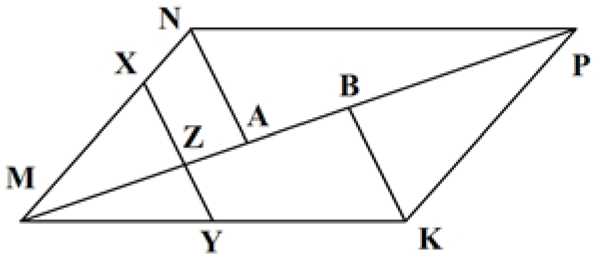
1. Ответ: **14,21,15,10,210.** Возможны и другие решения.
Возьмём четыре попарно взаимно простых числа a, b, c, d и запишем в двух противоположных вершинах квадрата числа ab и cd, в других вершинах – числа ad и bc, а в центре – abcd (см. рис.).



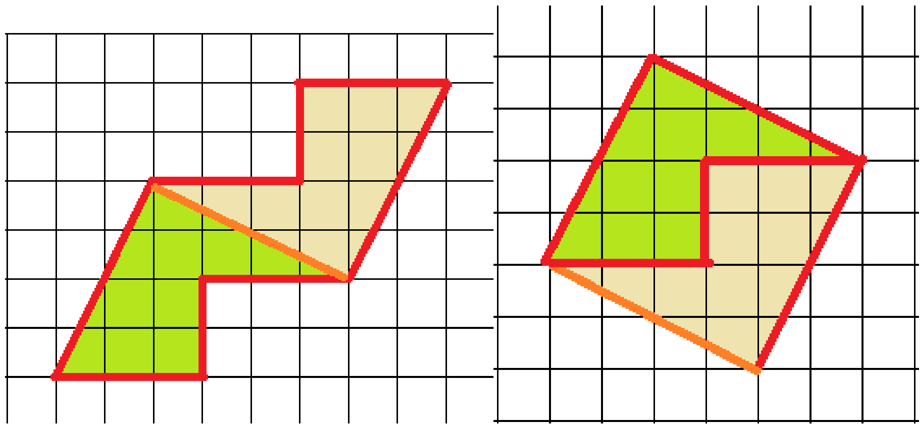
2. Ответ: **20 км.** Решение. Обозначим буквой s расстояние от деревни до станции в километрах. Если бы турист шёл всё время со скоростью 3 км/ч, то на весь путь он затратил бы s/3 часов. А на самом деле он был в пути1 + (s – 3) : 4 часов, что на 85 минут (то есть 17/12 часа) меньше, чем s/3. Таким образом, 1 + (s – 3) : 4 = s/3 + 17/12, откуда s = 20. Тогда на выполнение всего заказа обоим рабочим потребуется 4 + 6 = 10часов. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: верное решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, верное решение обратной задачи-2 балла).

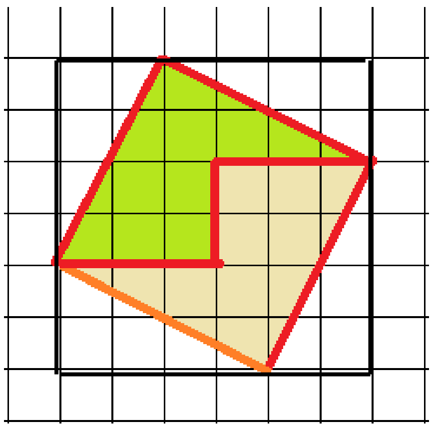
3. Ответ: **209.** Решение. 209 = 2·3·5·7 – 1
209 = 2·3·5·7 – 2+1=2(3·5·7 – 1)+1
209=2·3·5·7 – 3+2=3(2·5·7 – 1)+2
209=2·3·5·7 – 5+4=5(2·3·7 – 1)+4
209=2·3·5·7 – 7+6=7(2·3·5 – 1)+6

4. Ответ: $\frac{4}{19}$. Решение. Отметим точки A и B на диагонали MP так, чтобы $NA \| XY$ и $KB \| XY$. Треугольники MNA и MXZ подобны, так же как и треугольники MKB и MYZ.
$\frac{MN}{MX} = \frac{MA}{MZ}$; $\frac{MK}{MY} = \frac{MB}{MZ}$, складываем равенства и получаем $\frac{MN}{MX} + \frac{MK}{MY} = \frac{MA+MB}{MZ}$.
Так как стороны треугольников MNA и PKB попарно параллельны и стороны MN=PK, то эти треугольники равны. Тогда MA=PB и MA+MB=PB+MB=MP.
Следовательно, $\frac{MN}{MX} + \frac{MK}{MY} = \frac{MP}{MZ}$, отсюда находим, что $\frac{MP}{MZ} = \frac{5}{4} + \frac{7}{2} = \frac{19}{4}$, $\frac{MZ}{MP} = \frac{4}{19}$.



5. Ответ: на рисунке. Необходимо доказать, что это квадрат. Все углы прямые по построению. Достроить до квадрата и доказать, что все стороны равны между собой через равенство 4 прямоугольных треугольников.

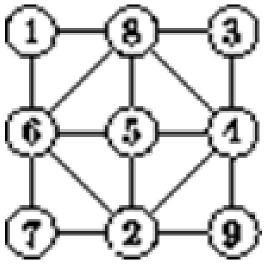




Муниципальный этап XI республиканской математической олимпиады школьников имени академика РАО П.М.Эрдниева в 2018-2019 учебном году

Решение
9 класс

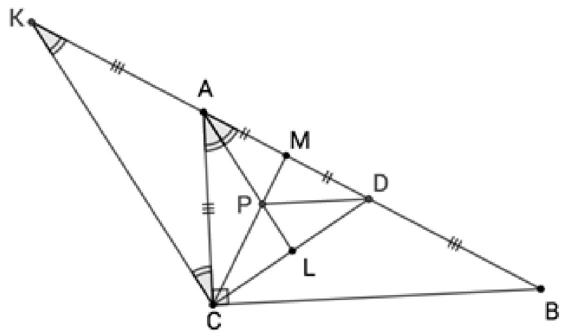
1. Ответ: на рисунке. Обозначим через x число из центрального кружочка, а через S – сумму четырёх чисел в вершинах квадрата. Тогда x + 2S = 45, 4S = 45 + S + 3x. Решая систему, находим x = 5, S = 20. Короткий подбор приводит к указанной расстановке чисел.



2. Ответ: **в 6 часов.** Решение: Точку встречи обозначим за С. Пусть от рассвета до полудня прошло x часов. Скорость первого пешехода на участке AC равна AC/x, на участке BC равна BC/4. Его скорость постоянна, и значит AC/x = BC/4 , что можно переписать в виде AC/BC = x/4 . Аналогично для второго пешехода: равенство скоростей на участках BC, AC выльется в соотношение BC/x = AC/9 , которое мы перепишем в форме AC/BC = 9x.Получаем, что x/4 = 9/x , и по свойству пропорции x2 = 36, x = 6. Рассвет был на 6 часов раньше полудня, т. е. в 6 утра. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).
3. Ответ:**2019.** Решение:

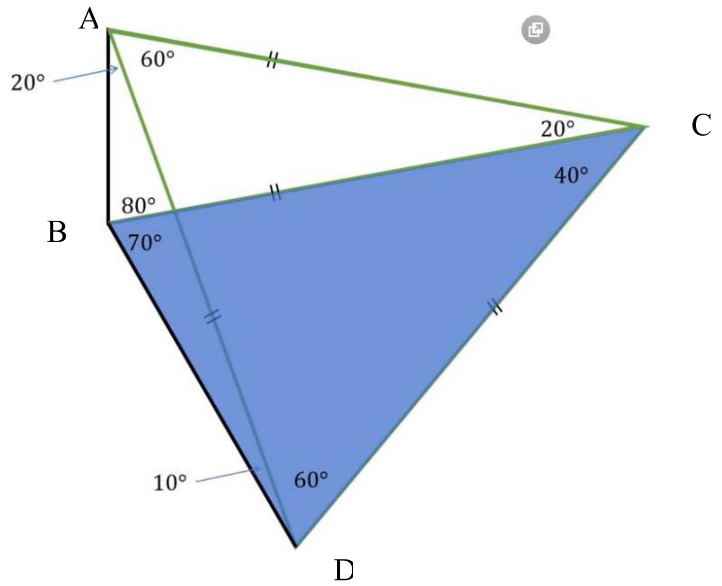
$$n = 11k + 6 = 7m + 3 = 29l + 18,\ k,\ m,\ l \in Z,\ n \in N,\ n = ?$$
$$11k + 6 = 7m + 3 \ \Rightarrow\ 7m - 11k = 3 \ \Rightarrow\ m = 11t + 2,\ k = 7t + 1,\ t \in Z$$
$$11(7t + 1) + 6 = 29l + 18 \ \Rightarrow\ 77t - 29l = 1 \ \Rightarrow\ t = 29s - 3,\ l = 77s - 8,\ s \in Z$$
$$n = 29(77s - 8) + 18 \geqslant 1 \ \Rightarrow\ s = 1 \ \Rightarrow\ n = 2019$$

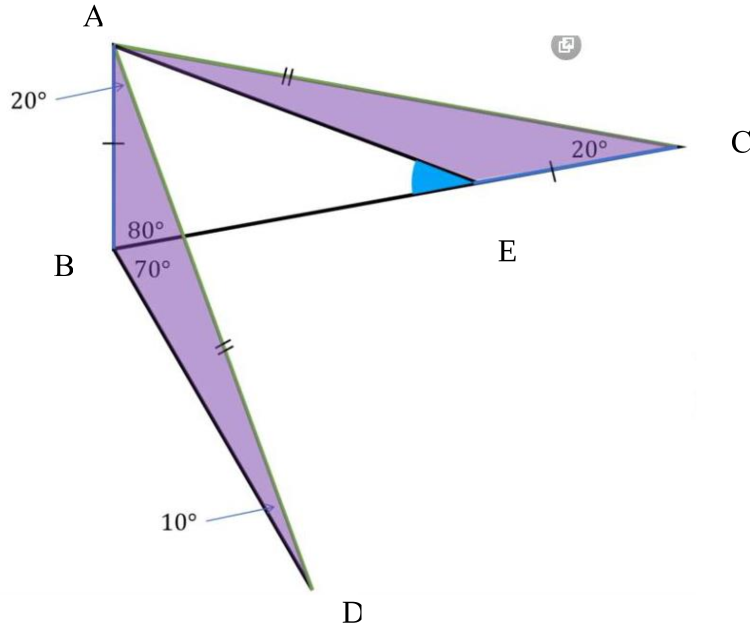
4. Решение. Пусть AL и CM пересекаются в точке P (см. рисунок). Тогда утверждение задачи сводится к доказательству того, что DH проходит через точку P.



На продолжении гипотенузы AB отметим точку K так, чтобы AK = BD = AC. Тогда AP – биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника CAK, следовательно, AP || KC. Тогда по теореме Фалеса: MP:PC = MA:AK.
Учитывая, что MA = MD и AK = BD, получим: MP:PC = MD:DBDP || BC.
Так как BC⊥AC, то DP⊥AC, то есть DH проходит через точку P, что и требовалось.

5. Ответ: 30°. Решение. Дан равнобедренный треугольник ABC, построим на стороне AC равносторонний треугольник ACD. Найдем углы CBD, BAC и BDA. которые равны 70°, 20° и 10°. Отложи на стороне BC отрезок CE, равный AB. Треугольник AEC и ABD равны между собой по 1 признаку равенства треугольников, тогда угол CEA=углу BDA = 10°. Угол AEB внешний угол треугольника ACE и равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним. Таким образом, угол AEB = 30°.

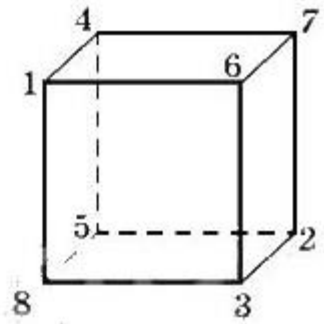




Муниципальный этап XI республиканской математической олимпиады школьников имени академика РАО П.М.Эрдниева в 2018-2019 учебном году

Решение 10 класс

1. Ответ: на рисунке. Возможны и другие решения. Сумма всех чисел от 1 до 8 равна 36. У куба 6 граней. Каждое число попадает на 3 грани, значит сумма всех чисел на всех гранях 36*3= 108. Сумма чисел на одной грани должна быть в 6 раз меньше , то есть 18. По вертикальным ребрам их сумма должна быть равна 9. 1+8= 6+6=7+2=4+5.



2. Ответ: **в 2 раза.** Решение: Пусть скорость медленного спортсмена равна x км/мин, а периметр стадиона S км. Тогда за 15 мин он пробегает 15x км, а быстрый спортсмен пробегает (15x+S) км. А тогда скорость быстрого - $\frac{15x+S}{15}$ км/мин. Рассмотрим теперь случай когда спортсмены бегут навстречу друг другу. Медленный пробегает 5x км, а быстрый $\frac{15x+S}{3}$ км и в сумме это составляет S. Упрощая уравнение 5x + $\frac{15x+S}{3}$ =S, находим, что S=15x. Но тогда скорость быстрого спортсмена равна 2x. И получается что отношение скорости быстрого спортсмена к скорости медленного спортсмена равно 2.(При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).

3. Ответ:

При $a = 0$ $x = 0$; при $a \geq 1$ $x = \dfrac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$;

при $a < 0$ и $0 < a < 1$ решений нет.

Решение. Ясно, что $a \geq 0$, $x \geq 0$. Положим $y = \sqrt{a+x} \geq 0$, тогда $x = \sqrt{a-y}$. Возводя в квадрат и вычитая, получим $x + y = y^2 - x^2$, то есть $x + y = 0$ или $y - x = 1$. $x + y$ может равняться нулю только при $x = y = 0$, тогда и $a = 0$.

Если $y = x + 1$, то $(x + 1)^2 = x + a$, $x^2 + x + 1 - a = 0$. При $a < 1$ это уравнение неотрицательных корней не имеет. При $a \geq 1$ единственный неотрицательный корень равен $\dfrac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$.

4. Ответ: $\dfrac{29+5\sqrt{17}}{2}$

Решение. Пусть $AB = AC = x$, $\angle OAC = \alpha$. Тогда по теореме косинусов в треугольниках AOC и BOA получаем два выражения: $25+x^2-10x\cdot\cos\alpha = 9$ и $25+x^2-10x\cdot\cos(90^\circ-\alpha) = 49$. Заметим, что $\cos(90^\circ-\alpha) = \sin\alpha$. Тогда $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$$\left(\frac{x^2-24}{10x}\right)^2 + \left(\frac{x^2+16}{10x}\right)^2 = 1.$$

$$2x^4 - 116x^2 + 832 = 0.$$

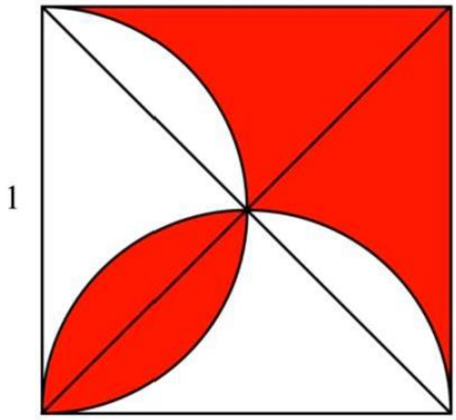
$$x^2 = 29 \pm 5\sqrt{17}.$$

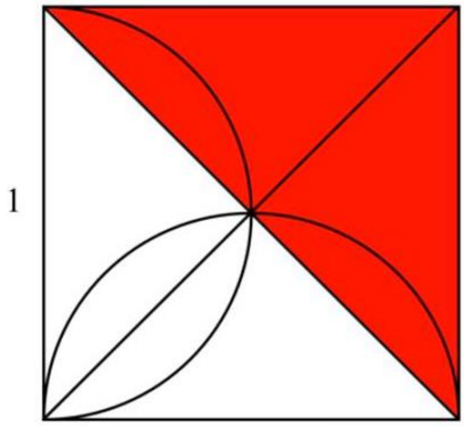
Второй вариант с минусом не подходит, так как синус в таком случае получается отрицательным, а такого не может быть, так как угол острый. Таким образом:

$$S = \frac{AB\cdot AC}{2} = \frac{29+5\sqrt{17}}{2}.$$

5. Ответ: 0,5

Решение. Проведем диагонали квадрата. Образовавшиеся луночки равны, тогда достроим до треугольника поворотом на 90^0, и получим равновеликий треугольник. Площадь фигуры равна 0,5.

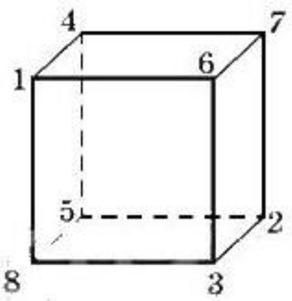




Муниципальный этап XI республиканской математической олимпиады школьников имени академика РАО П.М.Эрдниева в 2018-2019 учебном году

Решение
11 класс

1. Ответ: на рисунке. Сумма всех чисел от x+1 до x+8 равна 8x+36. У куба 6 граней. Каждое число попадает на 3 грани, значит сумма всех чисел на всех гранях (8x+36)*3= 24x+108. Сумма чисел на одной грани должна быть в 6 раз меньше , то есть 4x+18. По вертикальным ребрам их сумма должна быть равна 2x+9. x+1+x+8=x+6+x+3=x+7+x+2=x+4+x+5. При x=1 получим решение. Возможны различные решения.



2. Ответ: 4,8 км/ч. Решение. Пусть расстояние равно S, тогда S/x = t, S/6 = t-1/4, S/4 = t+14. Находим t=5/4 и S=6, тогда x =4,8. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: решение прямой задачи 4 балла, составление обратной задачи -1 балл, решение обратной задачи-2 балла).

3. Ответ: $x = 2cos\dfrac{2\pi}{9}$

$$\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}} = x$$

$$x = 2\cos\alpha > 0,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\alpha}}} = \sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}}} = \sqrt{2+\sqrt{2-2\cos\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \sqrt{2+\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{4}}} = \sqrt{2+2\sin\frac{\alpha}{4}} = 2\cos\alpha$$

$$\sin\frac{\alpha}{4} = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$$

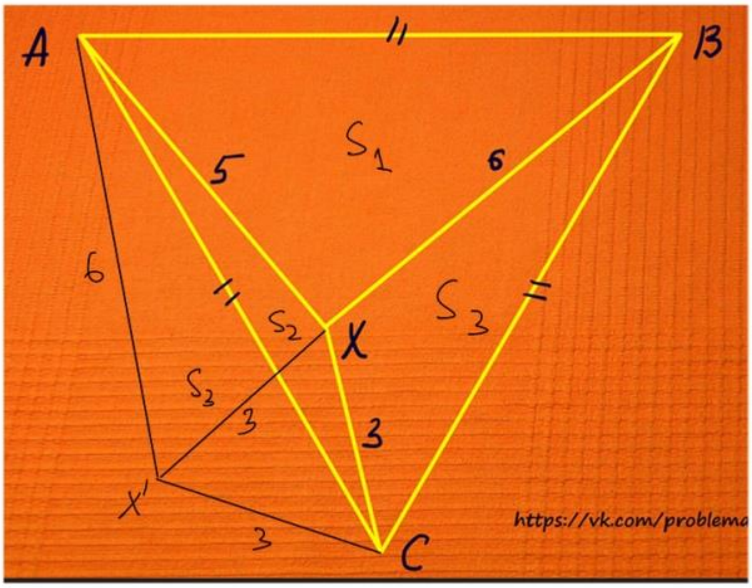
$$\cos 2\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right) = -2\sin\left(\frac{7\alpha}{8}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{9\alpha}{8}-\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\frac{7\alpha}{8}+\frac{\pi}{4} = \pi k,\ k\in Z\ \Rightarrow\ \emptyset$$

$$\frac{9\alpha}{8}-\frac{\pi}{4} = \pi k,\ k\in Z\ \Rightarrow\ \alpha = \frac{2\pi}{9}$$

Ответ: $x = 2\cos\dfrac{2\pi}{9}$

4. Ответ: $3\sqrt{14}+\dfrac{35\sqrt{3}}{4}$. Возможны различные решения.



Повернем $\triangle CXB$ на 60° против часовой вокруг т. C

$X \to X'$, $B \to A \Rightarrow S_{CXAX'} = S_2+S_3$

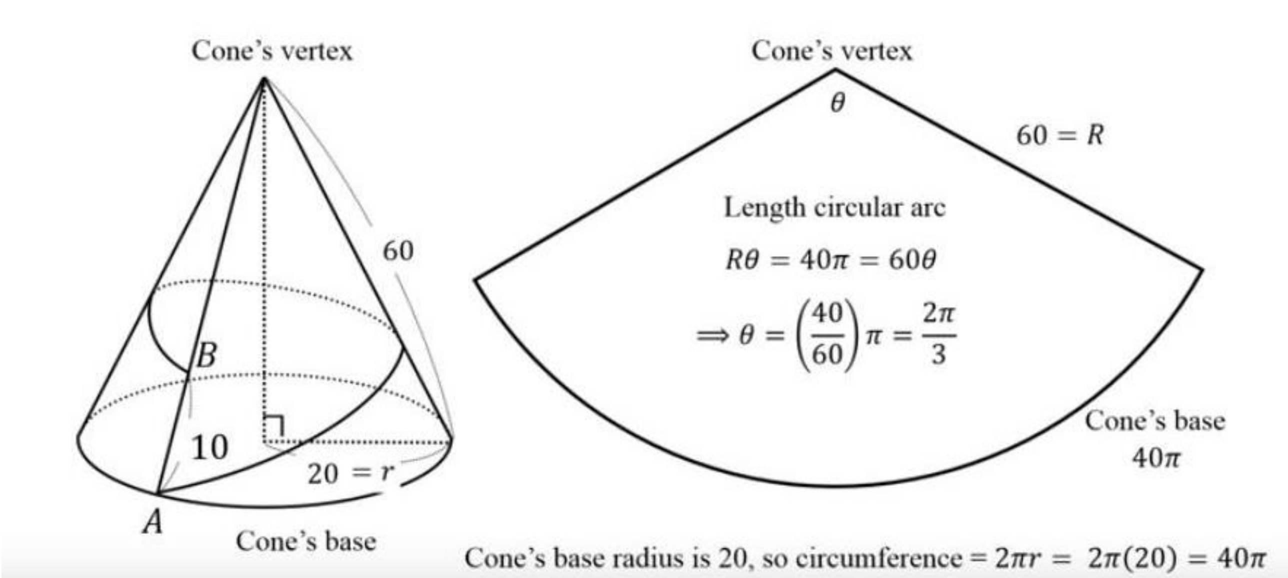
$S_{AXX'} = \sqrt{7(7-3)(7-6)(7-5)} = 2\sqrt{14} \Rightarrow S_2+S_3 = \frac{9\sqrt{3}}{4}+2\sqrt{14}$

Аналогично $S_1+S_2 = \frac{25\sqrt{3}}{4}+2\sqrt{14}$ и $S_1+S_3 = \frac{36\sqrt{3}}{4}+2\sqrt{14}$

$\Rightarrow S_{ABC} = S_1+S_2+S_3 = \frac{1}{2}\left(6\sqrt{14}+\frac{70\sqrt{3}}{4}\right) = 3\sqrt{14}+\frac{35\sqrt{3}}{4}.$

5. Ответ: $\frac{400}{\sqrt{91}}$

1) Рассмотрим развертку конуса. В секторе с радиусом 60 длина дуги равна 40π. Тогда центральный угол сектора равен $\theta = \frac{2\pi}{3}$



2) Найдем расстояние между точками A и B по теореме косинусов

$$AB^2 = 50^2 + 60^2 - 2 \cdot 50 \cdot 60 \cdot \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$AB = 10\sqrt{91}$$

3) Пусть длина спуска равна x, тогда длина подъема $10\sqrt{91} - x$.Используя теорему пифагора получим систему из двух уравнений $50^2 = x^2 + h^2$ и $50^2 = \left(1 - \sqrt{91} - x\right)^2 + h^2$.Решив систему получим $x = \dfrac{400}{\sqrt{91}}$