VIII республиканская олимпиада учителей математики «КУБ»

Ключи к заданиям (очный тур)

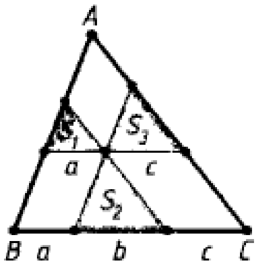
1. **Ответ: 9. Решение.** Найдем инвариант, т.е. характеристику, которая сохраняется при переходе от числа к сумме его цифр. Таким инвариантом является делимость на 3 и 9: число и сумма его цифр либо одновременно делятся на 3 (на 9), либо не делятся. Очевидно, что данное в условии число делится и на 3, и на 9. Значит, полученное однозначное число тоже должно делиться и на 3, и на 9. Такое однозначное число одно: 9.
2. **Ответ:** $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$

Решение. Каждый из получившихся треугольников подобен данному с коэффициентом соответственно $\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}$, $\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}$, $\frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}$, где S — искомая площадь данного треугольника ABC.

Обозначим стороны этих треугольников, параллельные стороне BC треугольника ABC, через a, b и c соответственно. Тогда $a+b+c=BC$,

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}=\frac{a}{BC},\quad \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}=\frac{b}{BC},\quad \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{c}{BC}.$$

Сложив почленно последние три равенства, получим:



$$\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{a+b+c}{BC}=1.$$

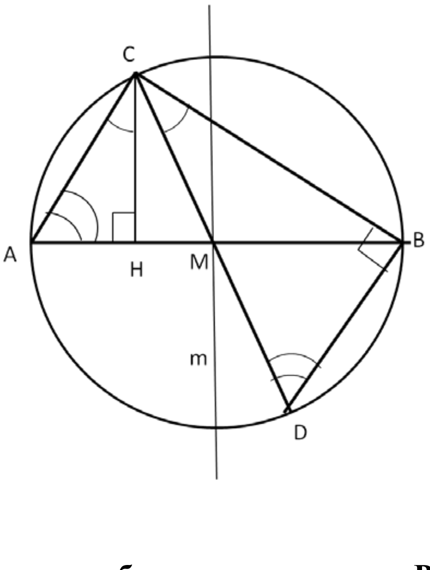
Отсюда находим, что

$$\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}.$$

Следовательно,

$$S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2.$$

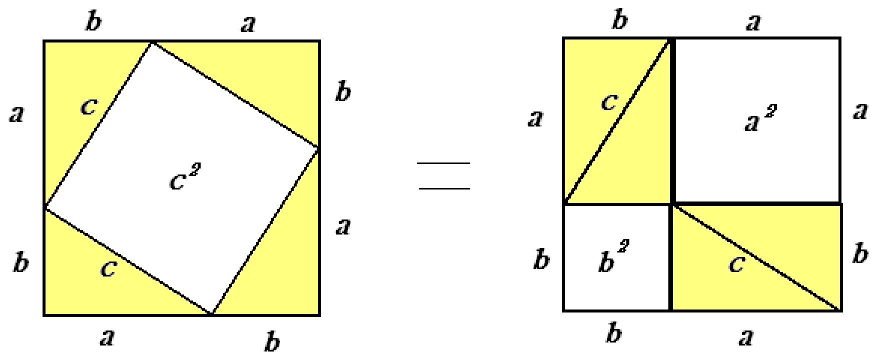
3. **Доказательство:** Опишем около $\triangle ABC$ окружность (см.рис). Продолжим медиану CM до пересечения с окружностью в точке D. Рассмотрим $\triangle ACH$ и $\triangle CBD$: $\angle ACH = \angle DCB$ (по условию), $\angle A = \angle D$ (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу BC), $\Rightarrow \angle AHC = \angle DBC = 90°$ $\Rightarrow$ CD- диаметр окружности. Центр окружности лежит на диаметре CD и на серединном перпендикуляре m к стороне AB. Т.к. медиана CM не является высотой, то прямые CD и m имеют одну общую точку M, которая является центром окружности$\Rightarrow \angle ACB = 90°$.



4. **Ответ: а) да, б) нет. Верное решение пункта а) – 3 балла, пункта б)-4 балла.**
   а) Да, например, $10\cdot 11+40\cdot 1=150$
   б) Нет. Заметим, что число дает тот же остаток от деления на 3, что и его сумма цифр. Поэтому сумма всех этих чисел будет давать остаток от деления на 3 такой же, как и просто сумма восьмидесяти единиц, то есть 2, а 150 кратно трем. Противоречие.

5. **Доказательство: 1 способ-3 балла, 2 способа-5 баллов, 3 способа-7 баллов. Существует различные способы доказательства. Например:**

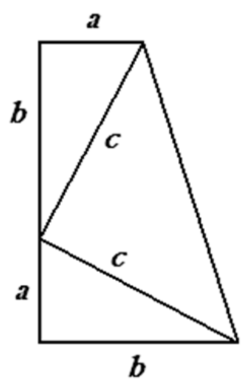
   1 способ. На чертеже четыре равных прямоугольных треугольника с катетами **a, b** и гипотенузой **c** уложены так, что их внешний контур образует квадрат со стороной **a+b**, а внутренний – квадрат со стороной **c**, построенный на гипотенузе



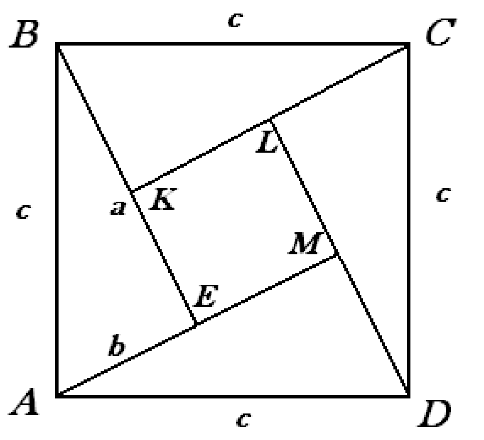
$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$ $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$

2 способ. Расположим два равных прямоугольных треугольника так, чтобы катет одного из них был продолжением другого. Площадь рассматриваемой трапеции находится как произведение полусуммы оснований на высоту $S=\frac{a+b}{2}\cdot(a+b)$

С другой стороны, площадь трапеции равна сумме площадей полученных треугольников: $S=\frac{ab}{2}\cdot 2+\frac{c^2}{2}$ Приравнивая данные выражения, получаем: или $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$



3 способ. Индийское доказательств Бхаскары.



Пусть ABCD квадрат, сторона которого равна гипотенузе прямоугольного треугольника ABE (AB = c, BE = a, AE = b); Пусть CK= BE =a, DL =CK, AM =DL

$\Delta ABE = \Delta BCK = \Delta CDL = \Delta AMD$, значит KL = LM = ME = EK = a-b.

$c^2 = 2ab + (a - b)^2 \quad c^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 \quad c^2 = a^2 + b^2$

6. Ответ: 37,5%. 1 способ – 4 балла, 2 способа-7 баллов. Решение:

1 способ. Применяем алгебраический метод пропорций.
Обозначим число акций первого брокера (4x), 75% от этого числа равны (3x).
Обозначим число акций второго брокера (5y), 80% от этого числа равны (4y).

	всего акций	*продано акций*
брокер 1	$4x$	$3x$
брокер 2	$5y$	$4y$

Так как сумма от продажи акций, полученная вторым брокером, на 140% больше, то и число проданных вторым брокером акций на 140% больше (цена постоянна).

	всего акций	*продано акций*
брокер 1	$4x$	$3x$ - 100%
брокер 2	$5y$	$4y$ - 240%

Отсюда легко найти отношение x к y:

$$\frac{3x}{4y} = \frac{100}{240} \qquad \frac{x}{y} = \frac{5}{9}$$

Обозначим x = 5t, y = 9t (снова избегаем дробей). Получим:

	всего акций	продано акций
брокер 1	$20t$	$15t$
брокер 2	$45t$	$36t$

Можем теперь посчитать общее число купленных и выгодно проданных акций:

	всего акций	продано акций
брокер 1	$20t$	$15t$
брокер 2	$45t$	$36t$
всего	$65t$	$51t$

Известна и общая стоимость купленных и проданных акций:

	всего акций	продано акций
брокер 1	$20t$	$15t$
брокер 2	$45t$	$36t$
всего	$65t$	$51t$
	3640 р.	3927 р.

Несложно посчитать старую и новую цену акций:

	всего акций	продано акций
брокер 1	$20t$	$15t$
брокер 2	$45t$	$36t$
всего	$65t$	$51t$
	3640 р.	3927 р.
	$\frac{56}{t}$	$\frac{77}{t}$

Задача теперь сводится к такой: на сколько процентов 77 больше 56?

$$\frac{77-56}{56}\cdot 100=\frac{21}{56}\cdot 100=\frac{3}{8}\cdot 100=0{,}375\cdot 100=37{,}5$$

2 способ. Решение. Применяем алгебраический метод через систему уравнений. Пусть a - стоимость акции первоначально, n% - повышение стоимости акции, k=1+n%. Обозначим число акций первого брокера x , число акций второго брокера y. Составим систему уравнений и решим ее.

$$\begin{cases} xa + ya = 3640 \\ 0{,}75xak + 0{,}8yak = 3927 \\ 0{,}8yak = 2{,}4 \cdot 0{,}8xak \end{cases} \quad \begin{cases} xa + \frac{9}{4}xa = 3640 \\ 0{,}75xak + 0{,}8yak = 3927 \\ 4y = 9x \end{cases} \quad \begin{cases} xa = 1120 \\ ya = 2520 \\ 0{,}75xak + 0{,}8yak = 3927 \\ 4y = 9x \end{cases}$$

$$\begin{cases} xa = 1120 \\ ya = 2520 \\ k(0{,}75xa + 0{,}8ya) = 3927 \\ 4y = 9x \end{cases} \quad \begin{cases} xa = 1120 \\ ya = 2520 \\ k = 1{,}375 \\ 4y = 9x \end{cases}$$

1,375=1+n%, n=37,5%

7. **Ответ: 25%. Решение:** Каждый год долг увеличивается на r% или в $\left(1+\frac{r}{100}\right)$ раз и уменьшается на величину ежегодного платежа. Для удобства вычислений обозначим $b = \left(1+\frac{r}{100}\right)$.
Тогда в первый год долг составит: $200\,000b$.
Остаток будет равен: $200\,000b - 130\,000$.
После второго года остаток по кредиту составит: $(200\,000b - 130\,000)b - 150\,000$.
По условию кредит был погашен за 2 года, а это значит, что остаток за второй год равен 0, то есть:
$$(200\,000b - 130\,000)b - 150\,000 = 0 \Leftrightarrow 200\,000b^2 - 130\,000b - 150\,000 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1,25, \\ b = -0,6. \end{array}\right.$$
По условию задачи $b > 0$, значит, $b = 1,25$, откуда следует, что $r = 25$%.
(При проверке необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: полное верное решение прямой задачи 4 балла, составление текста обратной задачи -1 балл, полное верное решение обратной задачи-2 балла).

8. **а) Ответ: 5см или 3 см. Решение.** Обозначим стороны треугольника через a= 7, b=8 и c
   1) Первый треугольник со сторонами и острым углом между ними $c^2 = 64 + 49 - 112 \cdot cos60 = 113 - 56 = 57 \quad c = \sqrt{57}$
   2) Второй треугольник со сторонами и острым углом против стороны b. По теореме косинусов получим $64 = 49 + c^2 - 14c \cdot cos60$
   $$c^2 - 7c - 15 = 0 \quad D = 49 + 60 = 109 \quad c_1 = \frac{7+\sqrt{109}}{2} \quad , \quad c_2 = \frac{7-\sqrt{109}}{2} < 0$$
   3) Третий треугольник со сторонами и острым углом против стороны a. По теореме косинусов получим $49 = 64 + c^2 - 16c \cdot cos60$
   $c^2 - 8c + 15 = 0 \quad D = 4 \quad c_1 = 5, \ c_2 = 3$

   б) Ответ: 3, 5 и 7. Решение. Пусть даны длины трех сторон треугольника a<b<c , которые образуют арифметическую прогрессию с разностью d>0 и углом 120 градусов. По теореме косинусов получим $c^2 = a^2 + b^2 + ab$
   $a = b - d \quad c = b + d$

$$(b+d)^2 = (b-d)^2 + b^2 + (b-d)b$$

$$5bd = 2b^2 \quad b = 2{,}5d \quad a = 1{,}5d \quad c = 3{,}5d$$

$$a : b : c = 3 : 5 : 7 \quad a = 3,\ b = 5,\ c = 7$$

Полное верное решение пункта а) 4 балла, б) 3 балла.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений..
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.