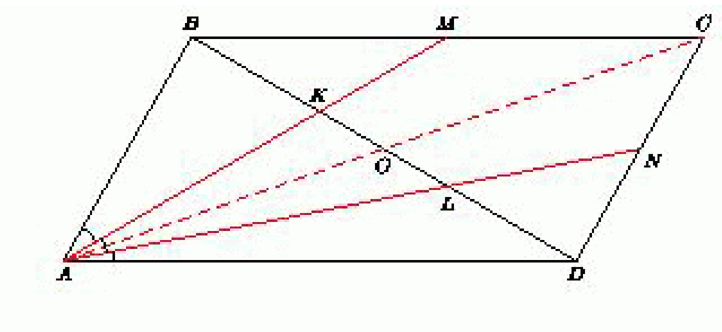
**VI республиканская олимпиада учителей математики «КУБ»**

**Ключи к заданиям (очный тур)**

1. **Ответ: не существует.** Предположим, что такое число существует. Тогда из условия задачи следует, что произведение его цифр делится на 25, поэтому среди его цифр должны быть две пятерки (нулей быть не может, иначе произведение цифр было бы равно нулю).
Пусть a и b – две другие его цифры, тогда сумма цифр этого числа равна 10 + a + b, а произведение цифр равно 25ab.
Составим уравнение: 25(10 + a + b) = 25ab. Оно равносильно уравнению 10 + a + b = ab, которое можно привести к виду: ab – a – b + 1 = 11. Тогда левую часть полученного уравнения можно разложить на множители способом группировки. В результате этого получим: (a – 1)(b – 1) = 11. Так как 11 – простое число, то один из множителей равен 1, а другой равен 11. Но a и b – цифры, поэтому ни одна из них не равна 12. Противоречие.
2. **Доказательство:**
а) Лучи AM и AN пересекают диагональ BD в точках K и L соответственно, а O – центр параллелограмма. Поскольку K – точка пересечения медиан треугольника ABC, то BK = ⅔ BO = ⅓ BD. Аналогично DL = ⅓ BD. Значит, BK = KL = DL. (верное решение - 4 балла)
б) Предположим, что это возможно. Пусть ∠BAM = ∠MAN = ∠DAN, лучи AM и AN пересекают диагональ BD в точках K и L соответственно, а O – центр параллелограмма. В треугольнике ABL медиана AK является биссектрисой, поэтому треугольник ABL – равнобедренный, а AK – его высота. Аналогично AL – высота треугольника AKD. Таким образом, AK ⊥ BD и AL ⊥ BD, то есть из точки A на прямую BD опущено два различных перпендикуляра, что невозможно.(верное решение-3 балла)




3. **Решение.**

**а)** Покажем, что шести одинаковых цифр, стоящих рядом, не может содержаться в записи данного многозначного числа.

Начнем с большей части чисел – с трехзначных. Если допустить, что идет 6 подряд одинаковых цифр, то мы увидем в ряду два одинаковых трехзначных числа, – противоречие.

Среди двузначных (а также однозначных) чисел тем более не стоит искать 6 подряд идущих одинаковых цифр. На стыке однозначных/двузначных, двузначных/трехзначных и трехзначных/1000 мы, очевидно, не можем наблюдать 6 подряд идущих одинаковых цифр.

Пример с 5-ю подряд идущими цифрами: …777778…

Наибольшее количество одинаковых цифр, стоящих рядом, в записи данного числа – 5.

**б)** Разобьем цифры исходного многозначного числа на группы и посчитаем количество цифр в каждой группе:

1;2;…9 (9 цифр)

10;11;…99 (90x2 цифр)

100;101;…999 (900x3 цифр)

1000 (4 цифры)

Итак, данное многозначное число содержит в записи 9+90x2+900x3+4=2893 цифр.

в) Ответ: Цифра 0. Однозначных чисел ровно 9, двузначных 99 - 9 = 90, трёхзначных 999 - 99 - 9 = 900, четырёхзначных 9000 и т.д. Однозначные числа займут в выписанном ряду первые 9 мест, двузначные 90*. 2 = 180 мест, трёхзначные 900 * 3 = 2700 мест. Поэтому интересующая нас цифра принадлежит трехзначному числу 2018=1829+189, 1829=3*609+2. Интересующая нас цифра стоит на 2018 месте и принадлежит 610-му четырехзначному, т.е. числу 709 (первое трехзначное число — это число 100). В этом числе интересующая нас цифра стоит на 2-м месте. (верное решение а) 2 балла, б) 2 балла, в) 3 балла)

4. **Ответ: 1,2.**

Рассмотрим второе неравенство. Оно имеет смысл при $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \neq 0$, т.е. при $x \neq 1$.

Пусть $\left|\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right|^{x-1,2} = t$. Тогда неравенство принимает вид $t + \frac{1}{t} \leq 2$.

Откуда $t = 1$ или $t < 0$.

При всех допустимых $x$ основание степени положительно и, следовательно, $t > 0$. Значит, неравенство выполняется только при $t = 1$. Выясним, при каких $x$ это происходит:

$$\left|\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right|^{x-1,2} = 1; \quad \left[\begin{array}{l} \left|\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right| = 1, \\ \begin{cases} x - 1,2 = 0, \\ \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \neq 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 2,5, \\ x = 1,2, \\ x = -0,5. \end{array}\right.$$

Подставим в первое неравенство найденные значения $x$ :

1. При $x = 2,5$ : $\log_{0,5}3,5 \cdot \log_{7,5}1,5 < 0$.

2. При $x = 1,2$ : $\log_{1,8}2,2 \cdot \log_{6,2}2,8 > 0$.

3. При $x = -0,5$ : $\log_{3,5}0,5 \cdot \log_{4,5}4,5 < 0$.

Неравенству удовлетворяет только значение $x = 1,2$.
**Ответ:** 1,2.

5. Классическое решение связано с отрезком, являющимся средним геометрическим длин оснований и параллельным этим основаниям. Второе связано с особым случаем, когда в трапеции ABCD углы ABC и ACD при диагонали AC равны. Треугольники ABC и ACD подобны между собой. Тогда диагональ AC является средним геометрическим оснований. (верное решение 1 способом- 4 балла, 2 способами- 7 баллов)

6. **Ответ: 0.**

**1 способ.** Проведем замену $y = -x$, тогда $\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right) = x^2 + 1 - x^2 = 1$. Значит $y + x = 0$

**2 способ**. Проведем замену $\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = t$, тогда $\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = \frac{1}{t}$

$$(x-t)^2 = x^2 + 1 \quad x^2 - 2xt + t^2 = x^2 + 1 \quad x = \frac{t^2 - 1}{2t}$$

$$\left(y - \frac{1}{t}\right)^2 = y^2 + 1 \quad y^2 - 2\frac{y}{t} + \frac{1}{t^2} = y^2 + 1 \quad x = -\frac{t^2-1}{2t}$$

Сложим и получим $y + x = 0$

**3 способ.** Так как $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ монотонная возрастающая функция, то возможен вариант, когда оба множителя одинаковы и равны 1.

Если $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$, то $y=x$.

Если $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=1$, тогда x = 0.

Если $\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$, тогда y = 0

Сложим и получим $y+x=0$

(верное решение 1 способом- 4 балла, 2 способами- 7 баллов)

7. Ответ: **1,5 минуты.** Решение: Так как 60 : 45 = $\frac{4}{3}$, то во втором случае за минуту можно было бы пройти $\frac{4}{3}$ эскалатора, то есть, на $\frac{1}{3}$ эскалатора больше, чем в первом случае. Это происходит за счет увеличения скорости человека в 2 раза. Следовательно, собственная скорость человека равна $\frac{1}{3}$ неподвижного эскалатора в минуту. Так как в первом случае можно спуститься за одну минуту, то скорость движения эскалатора равна $\frac{2}{3}$ неподвижного эскалатора в минуту. Значит, искомое время спуска равно: 1 : $\frac{2}{3}$ = 1,5 минуты. (При оценивании необходимо учитывать наличие в записи текста обратной задачи: полное верное решение прямой задачи 3 балла, составление текста обратной задачи -1 балл, полное верное решение обратной задачи-3 балла).

8. **Доказательство:**

**а)** Пусть даны длины трех сторон треугольника a<b<c , которые образуют арифметическую прогрессию с разностью d>0 и углом 120 градусов. По теореме косинусов получим $c^2=a^2+b^2+ab$

$a=b-d \quad c=b+d$

$(b+d)^2=(b-d)^2+b^2+(b-d)b$

$5bd=2b^2 \quad b=2{,}5d \quad a=1{,}5d \quad c=3{,}5d$

$a:b:c=3:5:7$

**(**верное решение а) -3 балла)

**б) Ответ: 1368, 1368, 574.**

**Решение: 2018=2*1009, 1009=28²+15²** по формуле $(m+n)^2+(m-n)^2=2m^2+2n^2$ получим

$1009=m^2+2n^2 \quad 2*1009=2m^2+(2n)^2$

**1009=19²+2*18²**

**d=2*1009=2*19²+36²** $a=(2n)^2-2m^2 \quad b=c=2*2n*m$

$a=36^2-2*19^2=574$

$b=c=2*36*19=1368$

(верное решение б) - 4 балла)

| Баллы | Правильность (ошибочность) решения |
|---|---|
| 7 | Полное верное решение. |
| 6-7 | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| 5-6 | Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.. |
| 4 | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев. |
| 2-3 | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| 0-1 | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). |
| 0 | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 | Решение отсутствует. |